

**QUASISTATIONÄRE ENTWICKLUNG
UND EINSATZ ERUPTIVER PROZESSE VON
PLASMASTRUKTUREN IM MAGNETFELD
MIT ANWENDUNG AUF DIE SONNENATMOSPHERE**

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Physik und Astronomie
an der Ruhr-Universität Bochum

von

WOLFGANG ZWINGMANN

aus Oberhausen

Bochum 1984



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546407_0008

**QUASISTATIONÄRE ENTWICKLUNG
UND EINSATZ ERUPTIVER PROZESSE VON
PLASMASTRUKTUREN IM MAGNETFELD
MIT ANWENDUNG AUF DIE SONNENATMOSPHERE**

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Physik und Astronomie
an der Ruhr-Universität Bochum

von

WOLFGANG ZWINGMANN

aus Oberhausen

Bochum 1984

MIT ANWENDUNG AUF DIE SONNENSTRAHLUNG
PLASMASTRUKTUREN IM KAMMERSTRAHL
UND EINWIRTS ERUPTION PROZESSE VON
QUASISTATIONÄRE ENTWICKLUNG

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

Dissertation eingereicht am 25. Mai 1984
Tag der mündlichen Prüfung 22. Juni 1984
Referent Prof. Dr. K. Schindler
Korreferent Prof. Dr. H. Schamel

von

WOLFGANG ZWINGMANN

aus Oberhausen

Berlin 1984

Herrn Prof. Dr. K. Schindler danke ich für die Anregung dieser Arbeit, für sein stetes Interesse und für viele wertvolle Diskussionen. Den Herren Dr. J. Birn und Dr. W. Seboldt möchte ich für Gespräche über Einzelfragen danken. Frau C. Krämer übernahm die Reinschrift des Manuskripts, Frau I. Tissier und Herr H. Ziegler die Erstellung von Abbildungen; ihnen sowie allen, die bei der Fertigstellung der Arbeit halfen, danke ich ebenfalls.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit soll untersucht werden, warum in stationären Plasma-Magnetfeldstrukturen in der Sonnenatmosphäre eruptive Prozesse auftreten.

Wir wenden folgendes allgemein diskutiertes Konzept an: In einer langsamen passiven Phase wird die zeitliche Änderung durch die Randbedingungen erzwungen und i.a. Energie gespeichert. Die Zeitentwicklung führt an einen Einsatzzpunkt, wo die Struktur instabil wird, entweder durch den Einsatz einer linearen Instabilität oder aber, weil kein Gleichgewicht mehr existiert. Wir behandeln die langsame passive Phase mit einem statischen bzw. stationären Modell, wobei vor allem Two-Ribbon-Flares beschrieben werden sollen.

Die theoretische Behandlung erfolgt im Rahmen der Magnetohydrodynamik, wobei das Magnetfeld durch Euler-Potentiale dargestellt wird. Bei dieser Darstellung kann die Lage der Feldlinien am Rand vorgeschrieben werden, was eine physikalisch sinnvolle Randbedingung an der Photosphäre darstellt. Bestehende Theorien, soweit sie sich nicht auf den kraftfreien Fall beschränken, erlauben nicht die explizite Vorgabe von Magnetfeldverscherung am Rand. Unsere Theorie wurde zur Behandlung dreidimensionaler Strukturen entwickelt; für explizite Rechnungen beschränken wir uns auf translationsinvariante Konfigurationen, wobei die Darstellung in Euler-Potentialen beibehalten wird.

Aus der ersten Variation des Gradschen Energiefunktionalen werden die Grundgleichungen für das Gleichgewicht abgeleitet, die zweite Variation liefert ein Stabilitätsfunktional $\delta^2 F$. Es wird gezeigt, daß $\delta^2 F$ hinreichend ist für Stabilität gegen ideal-magnetohydrodynamische Störungen. Für Randbedingungen, die Teilchenfluß durch den Rand zulassen, liefert $\delta^2 F$ hinreichende und notwendige Stabilitätskriterien. Es wird gezeigt, daß Schichtgleichgewichte vom Typ des Kippenhahn-Schlüter-Modells bei Annahme derartiger Randbedingungen für die Störung instabil sind. Die Theorie stationärer Gleichgewichte wird in Euler-Potentialen neu formuliert, wobei die Fälle mit kompressibler und inkompressibler Strömung behandelt werden. Bei der statischen und stationären Theorie wird jeweils der zweidimensionale Sonderfall diskutiert. Zur expliziten Berechnung von Gleichgewichtsfolgen wurde ein numerisches Verfahren entwickelt, das für statische Gleichgewichte eine Stabilitätsanalyse mit Hilfe von $\delta^2 F$ durchführt.

Die oben beschriebene Theorie wurde angewandt zur Berechnung von Gleichgewichtsfolgen von Strukturen in der Sonnenatmosphäre, wobei wir uns auf empirische Modelle beziehen und sie in eine quantitative Beschreibung umsetzen. Beim Newly-Emerging-Flux-Modell (Heyvaerts et al., 1977) wird das Anwachsen neuen magnetischen Flusses in der Nähe einer bestehenden Struktur als Auslöser eines Flares angenommen. Wir zeigen, daß es bei richtiger Polarität eine obere Grenze für die Stärke des neuen Flusses gibt, so daß bei dessen Erhöhung kein Gleichgewicht mehr existiert, was als Beginn der dynamischen Phase interpretiert wird.

Bei dem Modell von Kopp und Pneuman (1976) wird als Anfangsphase des Flares die Öffnung einer magnetischen Arkadenstruktur angenommen. Wir führten verschiedene Berechnungen von Gleichgewichtsfolgen durch, um diesen Effekt zu analysieren. Erstmals werden Plasmadruck und magnetische Verscherung unabhängig voneinander als Randbedingung vorgegeben. Es zeigt sich, daß die Anwesenheit eines Druckgradienten wesentlich ist für die Existenz von Einsatzenpunkten. Die magnetische Verscherung ist für mittlere Werte destabilisierend, starke Verscherung kann stabilisieren. Außerdem wird gezeigt, daß die Gravitation stabilisiert. Nach dem Einsatzenpunkt ist ein dynamischer Übergang auf Gleichgewichtszustände möglich, die in einer Variante des Modells von Kopp und Pneuman diskutiert werden.

Der Einfluß stationärer Strömung auf die Lage von Einsatzenpunkten wird für ein einfaches Modell eines Helmet Streamers untersucht. Wir finden, daß stationäre inkompressible Strömung i.a. destabilisiert, daß dieser destabilisierende Effekt aber relativ klein ist.

Inhalt

1.	Einleitung	1
1.1	Struktur der Sonnenatmosphäre und eruptive Prozesse	1
1.2	Empirische Modelle solarer eruptiver Prozesse	5
1.3	Problemstellung und Vorgehensweise	10
2.	Grundlagen	16
2.1	Das magnetohydrodynamische Modell	16
2.2	Gleichgewichtstheorie	22
2.3	Gleichgewichtsfolgen und kritische Punkte	26
3.	Beiträge zur Theorie stationärer Plasmastrukturen	30
3.1	Statische Gleichgewichte und Grad'sches Energiefunktional	30
3.2	Stabilitätsanalyse statischer Gleichgewichte	36
3.2.1	Stabilität dreidimensionaler statischer Gleichgewichte	36
3.2.2	Der Spezialfall zweidimensionaler Gleichgewichte	47
3.2.3	Instabilität von Schichtgleichgewichten bei Randbedingungen mit Teilchenaustausch	51
3.3	Gleichgewichte mit stationärer Strömung	53
3.3.1	Dreidimensionale stationäre Gleichgewichte	53
3.3.2	Der zweidimensionale Sonderfall	61
3.4	Das numerische Verfahren	66
4.	Anwendung auf eruptive Prozesse in der Sonnenatmosphäre	73
4.1	Einfluß der Entstehung neuen magnetischen Flusses an der Photosphäre	73
4.2	Wirkung von Magnetfeldverscherung, Plasmadruck und Gravitation	82

4.3	Einfluß stationärer Strömung	102
	Literatur	107
	Anhang A	112

1. Einleitung

1.1 Struktur der Sonnenatmosphäre und eruptive Prozesse

In dieser Arbeit werden Vorgänge behandelt, die in der Sonnenatmosphäre, genauer in der Region oberhalb der Photosphäre der Sonne bis zu einem Abstand von etwa einem Sonnenradius stattfinden. Die Prozesse im Plasma der Sonnenatmosphäre sind nicht nur für die Phänomenologie der Sonne interessant, sondern auch für andere, nicht so gut beobachtbare Sterne. Hinzu kommt die allgemeine plasmaphysikalische Bedeutung der Prozesse in der Sonnenatmosphäre.

Die tiefste Schicht der beobachtbaren Sonnenatmosphäre ist die etwa 500 km dicke Photosphäre, aus der praktisch alle Strahlung von der Sonne nach außen abgegeben wird. Darüber liegt die Chromosphäre, an die sich in einer Höhe von $2 \cdot 10^3$ bis 10^4 km die Korona anschließt. In der Chromosphäre steigt die Temperatur stetig an, um an der Basis der Korona relativ schnell $5 \cdot 10^5$ K zu erreichen. Die Korona erstreckt sich bis zu mehreren Sonnenradien, die Temperatur beträgt 1 bis $5 \cdot 10^6$ K.

Diese Beschreibung gilt für die großräumige Struktur der ruhigen Sonne (z.B. Athay, 1976). Auf kurzen Zeitskalen spielen sich in der Sonnenatmosphäre dynamische Prozesse ab (siehe z.B. Bruzek und Durrant, 1977), verbunden mit lokaler Freisetzung großer Energiemengen, wobei das Magnetfeld der Sonne eine entscheidende Rolle spielt (z.B. Svestka, 1976a). Die eruptiven Prozesse spielen sich zum überwiegenden Teil in den sogenannten aktiven Ge-

bieten ab (Dodson und Hedeman, 1970). Im folgenden soll die Entwicklung und Struktur eines solchen Aktivitätsgebietes dargestellt werden (z.B. Svestka, 1976b).

Aktive Gebiete entstehen, wenn magnetischer Fluß durch die Photosphäre durchbricht, nachdem er durch die Konvektion nach oben getragen wurde. Es bilden sich zunächst Plages, das sind helle Gebiete in der Photosphäre, mit höherer Dichte und Temperatur und einem Magnetfeld von durchschnittlich 0,01 T. In dem nach einigen Tagen voll entwickelten aktiven Gebiet haben sich Sonnenflecken gebildet, dunkle Gebiete von bis zu einigen 10^4 km Durchmesser und einer Temperatur von etwa 4300 K. Ihre Struktur wird verursacht durch starke (0,1 - 0,4 T) Magnetfelder. In aktiven Gebieten bilden Sonnenflecken gewöhnlich bipolare Gruppen, d.h. zwei Inseln entgegengesetzter magnetischer Polarität. Oberhalb der Sonnenfleckengruppe, in der Chromosphäre und unteren Korona, bilden sich meist Filamente, kühle Materiewolken, die in der H_{α} -Linie zu beobachten sind (Tandberg-Hansen, 1974). Die Filamente sind lokalisiert an der sogenannten Neutrallinie, an der das Magnetfeld der Fleckengruppe keine Vertikalkomponente hat. Filamente über aktiven Gebieten haben ein internes Magnetfeld von etwa 0,01 T, eine Dichte von 10^{17} m^{-3} und eine Höhe von etwa $2 \cdot 10^4$ km. Es soll noch erwähnt werden, daß die Filamente weiterbestehen können, wenn die aktive Region verschwunden ist, sie bilden dann die ruhenden Protuberanzen, die zehnmal größer sind als die Filamente in aktiven Gebieten und ein internes Magnetfeld von etwa 10^{-3} T haben. In der Korona oberhalb aktiver Gebiete erhöhen sich Dichte und Temperatur um etwa den Faktor 2 bis 10, die sogenannte Korona-Kondensation. Es bildet sich ein

Streamer, eine großräumige Plasma-Magnetfeld-Struktur, die im Innern geschlossene Feldlinien hat und außen geöffnete Feldlinien, in denen Plasma in den Sonnenwind abströmt.

In diesen aktiven Gebieten werden eruptive Prozesse beobachtet, die Solar Flares, deren Ursache in dieser Arbeit theoretisch untersucht werden. Flares sind Ereignisse spontaner Energiefreisetzung in einem begrenzten Teil eines Aktivitätsgebietes, wobei der bei jedem Flare beobachtbare Effekt die Aufhellung in der H_{α} -Linie ist. Eine detaillierte Beschreibung der beobachteten Phänomene bei einem Flare findet man bei Svestka (1976a), Sturrock (1980b) und Svestka (1981), hier soll nur eine Übersicht gegeben werden. Der zeitliche Ablauf eines Flares wird von Beobachtern in vier aufeinanderfolgende Phasen unterteilt, die Preflare-Phase von etwa 10 min Dauer, die impulsive Phase mit einer Minute, die Flash-Phase von 5 min Dauer und die Hauptphase, die eine Stunde oder länger dauert. Nach den beobachteten Phänomenen unterscheidet man den optischen Flare und den Hochtemperatur-Flare. Der optische Flare, die beobachtbare Aufhellung in der H_{α} -Linie, wird verursacht durch Temperaturerhöhung in der Chromosphäre oder unteren Korona in etwa 5000 bis 15000 km, wobei sich deren Ausdehnung und Strahlungsintensität während der Flash-Phase rasch vergrößert, um während der Hauptphase abzufallen. Der Hochtemperatur-Flare wird verursacht durch Aufheizung des Korona-Plasmas über dem H_{α} -Flare bis auf Temperaturen von über 10^7 K. Die Aufheizung beginnt schon während der Preflare-Phase, beobachtbar in weicher Röntgenstrahlung. Während der impulsiven Phase werden Teilchen auf hohe Energien beschleunigt, was aus der Beobachtung im Mikrowellenbereich und harter Röntgenstrahlung geschlossen wird.

Nach einer verbreiteten Klassifizierung unterscheidet man zwei Arten von Flares, die kompakten Flares und die Two-Ribbon-Flares, die beide im folgenden näher beschrieben werden (z.B. Svestka, 1976a).

1) Kompakte Flares (compact flare, simple loop flare)

Dies sind die häufigsten Flares, bei ihnen wird relativ wenig Energie freigesetzt. Bei diesen Flares ist eine einfache magnetische Flußröhre beteiligt, bei der an Fußpunkten der in der Photosphäre verankerten Feldlinien eine Aufhellung in H_{α} beobachtet wird, die Struktur der Flußröhre ändert sich nur wenig. Man beobachtet Materiebewegung mit etwa 20 bis maximal 200 km/s, die sog. Surges.

2) Two-Ribbon-Flares

Alle größeren Flares sind von diesem Typ. Sie finden meist in der Nähe eines Filamentes statt. Bei diesen Flares bilden sich in der Hauptphase zu beiden Seiten der Neutrallinie zwei in H_{α} leuchtende Bänder (two ribbons), die sich mit einigen km/s auseinanderbewegen. Diese Flares sind meist mit Aktivierung des Filamentes verbunden, das vor oder während des Flares verschwindet. Während der Hauptphase eines solchen Flares beobachtet man die Bildung der sogenannten "Post"-Flare Loops, das sind helle, kurzlebige Schleifenprotuberanzen. Große Ereignisse, wie Two-Ribbon-Flares, beeinflussen deutlich ihre Umgebung: Der Streamer über aktiven Gebieten wird häufig "weggeblasen", was als Coronal Transient bezeichnet wird, die Magnetfeldstruktur bewegt sich mit dem enthaltenen Plasma mit einer Geschwindigkeit größer als

die des umgebenden Sonnenwindes fort, was zu Bildung einer interplanetaren Stoßwelle führt.

Die Energieabgabe bei Flares variiert zwischen 10^{22} J bei sehr kleinen Flares, den Subflares, bis zu $3 \cdot 10^{25}$ J bei den größten Flares. Bei den größeren Flares wird jeweils etwa ein Drittel der Gesamtenergie freigesetzt in elektromagnetische Strahlung, in die interplanetare Stoßwelle und in beschleunigte Teilchen.

1.2 Empirische Modelle solarer eruptiver Prozesse

Es wird inzwischen allgemein angenommen (van Hoven et al., 1980), daß der Energiespeicher für Flares das magnetische Feld in der Chromosphäre und unteren Korona ist. Eine für einen Flare ausreichende Energiemenge kann in einem kraftfreien Magnetfeld ($\nabla \times \underline{B} = 0$) gespeichert werden (Tanaka und Nakagawa, 1973). Krall et al. (1983) schlossen aus ihren Magnetfeldmessungen eines Aktivitätsgebietes, daß dort eine Feldenergie von 10^{25} J pro Tag gespeichert wurde. Im folgenden wird eine Übersicht gegeben über empirische Modelle für solare eruptive Prozesse, von denen alle der Wechselwirkung Plasma-Magnetfeld die entscheidende Rolle zuweisen (siehe auch Sturrock, 1980a; Priest, 1981a).

Die ersten noch qualitativen Modelle, die Instabilitäten in magnetischen Flußröhren betrachteten, waren die von Gold und Hoyle (1960) und von Alfvén und Carlqvist (1967). Diese älteren Modelle lieferten noch keine befriedigende Erklärung der Beobachtungen, sie zeigten aber, daß Stromschichten wichtig sind für eine Erklärung eruptiver Prozesse. Stromschichten sind geeignet zur Um-

setzung von magnetischer Energie in mechanische Energie, und deshalb werden sie als Mechanismus zur Erzeugung der eruptiven Phänomene, wie Aufheizung des Plasmas und Teilchenbeschleunigung, in den meisten Flare-Modellen angenommen (z.B. Priest, 1981b). Syrovatski (1972) behandelte die dynamische Erzeugung von Stromschichten durch zeitliche Änderung eines umgebenden Potentialfeldes. Er schlug eine einsetzende Mikroinstabilität als Ursache eines Flares vor. Das Modell wurde von Anzer (1973) kritisch diskutiert.

An dieser Stelle ist es nützlich, eine Unterscheidung der Modelle für kompakte Flares und Two-Ribbon-Flares vorzunehmen. Man nimmt an, daß kompakte Flares entweder durch eine magnetohydrodynamische Instabilität entstehen (Übersicht bei van Hoven, 1981) oder durch eine thermische Instabilität innerhalb der als stabil angenommenen Flußröhre (Übersicht von Craig, 1981). Im folgenden werden wir uns auf Modelle konzentrieren, die besser für Two-Ribbon-Flares geeignet sind.

Eines der ersten Modelle, das wichtige Phänomene bei Two-Ribbon-Flares qualitativ erklären konnte, war das Modell von Sturrock (1968). Die Ausgangskonfiguration ist die eines Helmet Streamers, wie er ähnlich in Abb. 1.2b dargestellt ist. Der Streamer enthält eine Stromschicht, in der Teilchenbeschleunigung stattfindet, was die beobachtete Radio- und Röntgenstrahlung erklärt, andererseits die Bildung der H_{α} -Ribbons. Die Stromschicht liegt allerdings bei dem Helmet Streamer zu hoch in der Korona, um ausreichend Energie dissipieren zu können (Sturrock, 1980a). In einem veränderten Modell betrachteten Barnes und Sturrock (1972) die Bildung von Strom-

schichten bei der Verschierung einer Feldkonfiguration durch Bewegung der in der massiven Photosphäre verankerten Fußpunkte der Feldlinien, analog zu Beobachtungen (Zirin und Tanaka, 1973). Sie zeigten, daß die kraftfreie Konfiguration bei genügend starker Verschierung mehr Energie hat als ein Potentialfeld mit gleichen photosphärischen Randbedingungen. Die Randbedingungen weitab von der Sonne unterscheiden sich aber bei beiden Feldern. Es konnte vor allem keine Instabilität des kraftfreien Feldes und damit kein Einsatzzpunkt nachgewiesen werden.

Die derzeit am meisten diskutierten Modelle sind das Newly-Emerging-Flux-Modell von Heyvaerts et al. (1977) und das Modell von Kopp und Pneuman (1976) für Two-Ribbon-Flares. Beide werden im folgenden näher diskutiert, weil die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen sich an diesen beiden Modellen orientieren.

Beobachtungen (Rust, 1974; Neidig et al., 1978; Mouradian et al., 1983) zeigen, daß die Häufigkeit von Flares in Aktivitätsgebieten zunimmt, wenn neuer magnetischer Fluß oberhalb der Photosphäre auftaucht, der die Komplexität der Feldstruktur vergrößert. Diese Beobachtung führte zu der Entwicklung des Newly-Emerging-Flux-Modells (Priest, 1976; Heyvaerts et al., 1977). Das Modell wird durch Abb. 1.1 illustriert, die die Anfangsphase darstellt: In der Nähe einer schon vorher existierenden Magnetfeldstruktur entsteht ein neues Feld, das von unterhalb der Photosphäre herauswächst. Es bildet sich eine Stromschicht an der Berührungsstelle aus, die relativ niedrig in der Chromosphäre oder unteren Korona liegen kann. In der Modellvorstellung von Heyvaerts et al. bewirkt die Dissipation in der Stromschicht die Aufheizung der um-

gebenden Korona in der Preflare-Phase (Kapitel 1.1). Der Einsatz des eigentlichen Flares beginnt, wenn die Stromschicht eine kritische Höhe erreicht hat, so daß eine thermische Instabilität entsteht, die die Resistivität in der Schicht stark erhöht. Während der Hauptphase des Flares finden starke Aufheizung der Korona und Teilchenbeschleunigung statt, was auch das Aufleuchten der Chromosphäre an den Fußpunkten der Magnetfeldlinien erklärt. Das Modell bietet eine Erklärung der beobachteten Phänomene bei einem kleinen Flare einer einfachen Flußröhre und auch bei einem Two-Ribbon-Flare. Es ist aber noch nicht geklärt, ob das Modell alle Beobachtungen quantitativ erklären kann (Heyvaerts et al., 1982). Eine exakte Behandlung der thermischen Instabilität steht noch aus (Priest, 1982). Es ist außerdem denkbar und noch nicht analysiert, ob nicht eine einsetzende MHD-Instabilität den eruptiven Prozess einleitet.

Das Modell von Kopp und Pneuman (1976) beschreibt die Entwicklung eines Two-Ribbon-Flares, die durch Abb. 1.2 illustriert wird. Der Ausgangspunkt ist eine Arkadenstruktur des Magnetfeldes, das ein Filament enthalten kann. Durch eine großräumige Instabilität wird die Feldstruktur geöffnet und das Filament in den Sonnenwind transportiert. Dies entspricht der Beobachtung, daß etwa der Hälfte aller Two-Ribbon-Flares die Aktivierung eines Filamentes vorangeht (Martin und Ramsey, 1973). Es entsteht eine Stromschicht (Abb. 1.2a), die resistiv instabil ist. Durch spontane Rekonnektion (Furth et al., 1963) bildet sich eine Struktur ähnlich wie bei einem Streamer aus (Abb. 1.2b). In der Stromschicht werden Teilchen beschleunigt, was die beobachteten Phänomene erklärt. Das Modell erklärt die Bildung der "Post"-Flare-Loops (Kapitel 1.1). Für weitere Details verweisen wir auf die Übersicht von Pneuman

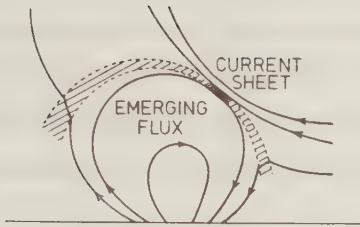


Abb. 1.1: Anfangsphase des Newly-Emerging-Flux-Modells (Heyvaerts et al., 1977): Wechselwirkung zwischen altem und neu aufsteigendem Fluß.

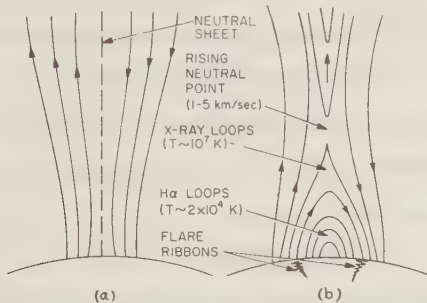


Abb. 1.2: Modell von Kopp und Pneuman (1976) für Two-Ribbon-Flares. a) Durch die Eruption geöffnete Feldstruktur. b) Durch folgende Rekonnektion gebildete Struktur mit "Post"-Flare-Loops.

(1981). Ein wesentlicher noch ungeklärter Punkt ist die Art der großräumigen Instabilität, die die Feldstruktur öffnet und zur Bildung der Stromschicht führt.

Dieses zuletzt genannte Problem gilt im Prinzip für die meisten heutigen Flare-Modelle. Der Grund für das Umschlagen der ruhigen Phase, in der magnetische Energie gespeichert wird, in die schnelle aktive Phase ist auch heute noch weitgehend unverständlich.

1.3 Problemstellung und Vorgehensweise

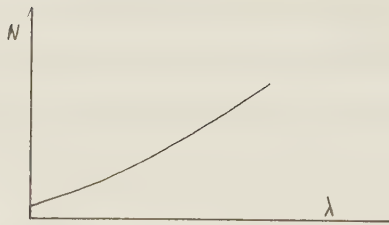
Diese Arbeit behandelt die passive Phase vor dem Einsatz eruptiver Prozesse und die Art des Auslösemechanismus. Vor dem Flare laufen zeitliche Veränderungen langsam ab, und es ist deshalb sinnvoll, diese Phase durch eine Folge von Gleichgewichten zu beschreiben (Kapitel 2.2). Wir werden uns dabei an den beiden im vorigen Abschnitt zuletzt genannten Modellen orientieren, wobei das Ziel ist, die quasistatische Phase und die Art des Einsatzes mit einem selbstkonsistenten Modell quantitativ zu analysieren. Die Fragen, die mit der theoretischen Behandlung beantwortet werden sollen, sind:

- 1) Welche Veränderung der photosphärischen Randbedingung führt zu einer Instabilität? Eine Möglichkeit ist die wachsende Verschärfung der Feldstruktur, hervorgerufen durch horizontale Strömung an der Photosphäre (Zirin und Tanaka, 1973). Als zweite Möglichkeit kommt eine lokale Druckerhöhung am Rand der Photosphäre in Frage, hervorgerufen durch subphotosphärische Konvektion. Schließlich kann sich neuer magnetischer Fluß von unter-

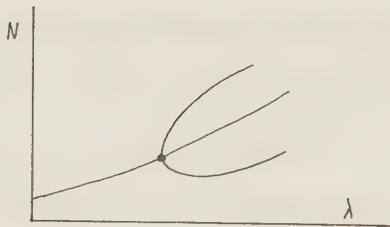
halb der Photosphäre bilden (Rust, 1976). Eine theoretische Behandlung des Einflusses der Randbedingungen ist schon allein deshalb nötig, weil das Magnetfeld in der Korona bisher nicht gemessen werden konnte und nur indirekt aus den photosphärischen Messungen berechnet werden kann (z.B. Athay, 1976).

2) Was läßt sich über die Dynamik am Einsatzzpunkt aussagen?

Eine Gleichgewichtstheorie, wie sie hier angewendet werden soll, ist prinzipiell nicht in der Lage, die Dynamik der eruptiven Phase quantitativ zu beschreiben. Es ist aber möglich, aus der Art des Einsatzzpunktes, wie er aus der Theorie folgt, qualitative Aussagen zu gewinnen. Dies wird durch Abb. 1.3a bis 1.3d illustriert. 1.3a kennzeichnet ein Verhalten mit stetiger Veränderung des Gleichgewichtes, es erfolgt kein Einsatz. Bei 1.3b erfolgt die stetige Veränderung bis zu einem Bifurkationspunkt, wo zwei weitere Lösungsäste abzweigen. An diesen Bifurkationspunkten erfolgt in der Regel eine Änderung des Stabilitätsverhaltens, d.h. der stetig weiterführende Ast enthält instabile Gleichgewichte. Es muß allerdings noch explizit nachgewiesen werden, daß auch physikalische Instabilität vorliegt und daß keine quasistatische Weiterentwicklung längs eines abzweigenden stabilen Astes erfolgt. Eine grundlegende andere Weise der Reaktion auf die Änderung der Randbedingungen liegt bei 1.3c und 1.3d vor. Hier liegen Begrenzungspunkte vor, dort muß das System dynamisch werden, weil bei Erhöhung von λ kein Gleichgewichtszustand stetig erreicht werden kann. Bei 1.3d ergibt sich im Prinzip die Möglichkeit von dynamischen Übergängen auf andere Äste der Lösungskurve. Man erhält ein "explosives" Verhalten des Einsatzes für 1.3c und 1.3d.



a



b



c



d

1.3 Die Diagramme stellen Gleichgewichtsfolgen dar, wobei jedem Punkt auf den Kurven eine Gleichgewichtslösung entspricht. Der Parameter λ (Abszisse) ist ein Maß für die Änderung der Randbedingungen, N (Ordinate) ist eine typische Norm. Das verschiedene Verhalten in 1.3a bis 1.3d wird im Text erläutert.

3) In welcher Form wird die Energie gespeichert? Als Energiearten kommen magnetische Energie, thermische Energie und potentielle Energie des Plasmas im Schwerfeld der Sonne in Frage. Für die Interpretation eventuell auftretender Einsatzzpunkte ist es wichtig, welche Anteile der gespeicherten Energie in den verschiedenen Formen vorliegen.

4) Welchen Einfluß hat stationäre Strömung? Jede Plasma-Magnetfeldstruktur in der Sonnenatmosphäre schließt sich in irgendeiner Weise an den Sonnenwind an. Davon abgesehen werden auch in den unteren Schichten der Korona und der Chromosphäre Strömungen beobachtet (siehe Kapitel 2.2). Deshalb ist es ebenfalls wichtig, den Einfluß von stationärer Strömung theoretisch zu untersuchen.

Diese Problemstellungen können im Rahmen der Magnetohydrodynamik behandelt werden (Kapitel 2.1), wobei mit der quasistatischen Näherung (Zeitableitung Null, geringe Strömung) die Fragen 1 bis 3 behandelt werden. Für den Problemkreis 4 wird eine stationäre Näherung verwendet (Zeitableitung Null). Die Lösungstheorie für zweidimensionale magnetohydrostatische wird z.B. von Low (1975) angegeben, wobei die MHD-Gleichungen auf eine skalare Gleichung (2.24) für eine Komponente des magnetischen Vektorpotentials reduziert werden, diese wird häufig als Grad-Shafranov-Gleichung bezeichnet. Ergebnisse über Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität der Lösungen dieser Gleichung findet man bei Birn et al. (1978) und Heyvaerts et al. (1980, 1982). Eine dreidimensionale Lösungstheorie wird z.B. von Birn und Schindler (1981) angegeben. Tsinganos (1981, 1983) entwickelte eine Theorie zur Behandlung zweidimensionaler Gleichgewichte mit stationärer Strömung.

Die Grad-Shafranov-Gleichung hat den Nachteil, daß mit ihr nicht auf einfache Weise die Verscherung einer Magnetfeldstruktur als Randbedingung vorgegeben werden kann, wie Jockers (1978) zeigte. Dies gilt auch für die stationäre Theorie von Tsinganos. Es erweist sich, daß die bestehenden Theorien teilweise nicht ausreichend sind. Speziell zur Behandlung der photosphärischen Randbedingungen unter Berücksichtigung der Magnetfeldverscherung ist ein besseres Verfahren als die Behandlung mit der Grad-Shafranov-Gleichung nötig. Zur Untersuchung komplexerer Strukturen muß ohnehin ein dreidimensionales Verfahren angewandt werden, das sinnvollerweise eine physikalische Stabilitätsanalyse beinhaltet. Für komplexe dreidimensionale Plasma-Magnetfeld-Gleichgewichte mit stationärer Strömung ist eine Erweiterung der bestehenden Theorie notwendig.

Damit ergibt sich die Vorgehensweise in den folgenden Abschnitten: In Kapitel 2 werden die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Magnetohydrodynamik begründet. Die aus der Literatur bekannten Grundgleichungen für zwei- und dreidimensionale statische Gleichgewichte werden abgeleitet. Die Lösungstheorie zur Grad-Shafranov-Gleichung wird zusammengefaßt.

In Kapitel 3 wird die Theorie dreidimensionaler Plasma-Magnetfeldgleichgewichte erweitert. Es werden durchgehend Euler-Potentiale verwendet, die eine realistische Beschreibung der Randbedingungen erlauben. Bei den statischen Gleichgewichten wird eine Stabilitätsanalyse in der idealen MHD formuliert, wobei auch Randbedingungen für die Störung diskutiert werden, die Teilchenfluß durch den Rand zulassen. Für den statischen und stationären Fall werden jeweils zweidimensionale Spezialfälle angegeben, un-

ter Beibehaltung der Darstellung in Euler-Potentialen. Schließlich wird das numerische Verfahren skizziert, das für statische Lösungen auch eine Stabilitätsanalyse durchführt.

In Kapitel 4 werden explizite numerische Rechnungen von Gleichgewichtsfolgen vorgestellt. Das Newly-Emerging-Flux-Modell wird in Kapitel 4.1 quantitativ analysiert. Es soll gezeigt werden, ob und wie die Entstehung neuen Flusses zu kritischen Punkten führt. Diese Rechnung wird noch mit der Grad-Shafranov-Gleichung in einem einfachen Modell durchgeführt. In Kapitel 4.2 wird die quasistatische Entwicklung bipolarer Strukturen untersucht. Erstmals werden Feldverscherung und Druck voneinander unabhängig als Randbedingungen vorgegeben, außerdem wird der Einfluß der Gravitation analysiert. In Kapitel 4.3 wird anhand eines quasi-stationären Modells der Einfluß von Strömung untersucht.

Der Stand der Theorie wird jeweils bei der Behandlung der Einzelprobleme näher erläutert.

2. Grundlagen

2.1 Das magnetohydrodynamische Modell

In diesem Abschnitt wird die Theorie entwickelt, mit der die Vorgänge in der Sonnenatmosphäre beschrieben werden. Deren Auswahl hängt von den physikalischen Parametern ab, die das Plasma in der Sonnenatmosphäre charakterisieren. Eine umfassende Theorie muß in der Lage sein, die ruhige Phase vor Einsatz eines eruptiven Prozesses zu beschreiben, der in der Sonnenatmosphäre und der unteren Korona stattfindet. Die entscheidenden physikalischen Größen sind das Magnetfeld sowie Plasmadichte und -temperatur. Als typische Feldstärke über aktiven Gebieten wird von Beobachtern 0,01 T angegeben (siehe zum Beispiel Athay, 1976). Dichte und Temperatur sind unterschiedlich für die verschiedenen Regionen der Sonnenatmosphäre. Wir betrachten repräsentative Werte für die obere Chromosphäre oder für inhomogene Strukturen in der Korona, wie Protuberanzen (Fall A) oder die untere Korona (Fall B):

$$\text{A) } B = 0,01 \text{ T, } n_e = 10^{17} \text{ m}^{-3}, T = 10^4 \text{ K}$$

$$\text{B) } B = 0,01 \text{ T, } n_e = 5 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}, T = 2 \cdot 10^6 \text{ K}$$

(siehe z.B. Athay, 1976).

Es werden nun verschiedene typische Plasmaparameter betrachtet. Der Ionengyroradius beträgt im Fall A $9,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, im Fall B 0,13 m. Diese Größen sind sehr klein im Vergleich zu der durch Messungen erreichbaren Auflösung der Feinstrukturen in der Sonnenatmosphäre von etwa 700 km (1" bei optischer Beobachtung). Die mittlere freie Weglänge beträgt für den Stoß zwischen Ionen

und Elektronen 2,3 m (A) bzw. $9 \cdot 10^6$ m (B). Diese Größe ist im Fall A sehr klein gegen die Größe von Feinstrukturen, im Fall B vergleichbar mit der typischen Größenordnung von Strukturen von $L_O \approx 10^4$ km (z.B. Priest, 1982). Das Plasma kann damit als kontinuierliches makroskopisches Medium betrachtet werden. Die Stoßzeit zwischen Ionen τ_{ii} beträgt im Fall A $8,1 \cdot 10^{-6}$ s, im Fall B 2,3 s. Da diese Stoßzeiten klein sind gegen die Laufzeit von Alfvén-Wellen ($v_A = 7 \cdot 10^5$ m/s (A) bzw. 10^7 m/s (B)) durch eine Struktur der Größe L_O , kann der Plasmadruck als näherungsweise isotrop angesehen werden (z.B. Shkarofsky et al., 1966). Wir werden in unserer Betrachtung der Phase vor Einsatz des Flares nur solche Vorgänge behandeln, die langsam ablaufen und deren charakteristische Geschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist. Damit ist der Verschiebungsstrom vernachlässigbar. Die Bedingung für Quasineutralität ist, daß die typische Längenskala L_O groß gegen die Debye-Länge λ_D ist. Man erhält $\lambda_D = 2,2 \cdot 10^{-5}$ m (A) bzw. $4,4 \cdot 10^{-3}$ m (B), so daß quasineutrale Behandlung zulässig ist. Die Diskussion der Plasmakenngrößen zeigt, daß die Behandlung mit Hilfe der Magnetohydrodynamik (MHD) möglich ist (z.B. Shkarofsky et al., 1966).

Die Gleichungen der MHD werden im folgenden diskutiert. Kontinuitäts- und Bewegungsgleichung sind gegeben durch

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} \right) = \underline{j} \times \underline{B} - \nabla P - \rho \nabla \psi \quad (2.2)$$

ψ ist hierbei das Gravitationspotential. Die Reibungskraft wird vernachlässigt. Die Reynoldszahl $Re = L_O v_O m_i / kT \tau_{ii}$ beträgt

für $v_o = 1 \text{ km/s}$ $1,5 \cdot 10^7$ (A) bzw. $0,26$ (B). Die Viskosität spielt damit wegen $Re \gg 1$ im chromosphärischen Plasma keine Rolle, in der Korona ist die Abschätzung mit Re wegen der großen freien Weglänge nicht sehr zuverlässig und soll hier nicht weiter diskutiert werden. Das Verhältnis von thermischer zu Magnetfeldenergie wird durch $\beta = p/(B^2/2\mu_o)$ angegeben. Man erhält (A und B) $\beta = 3,5 \cdot 10^{-4}$, so daß die magnetischen Kräfte überwiegen.

Das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz ist gegeben durch (z.B. Krall und Trivelpiece, 1973)

$$\begin{aligned} \underline{E} + \underline{v} \times \underline{B} &= \eta \underline{j} + \frac{1}{ne} \underline{j} \times \underline{B} - \frac{1}{ne} \nabla \cdot \underline{P}_e \\ &+ \frac{m_e}{ne^2} \left(\frac{\partial \underline{j}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v} \underline{j} + \underline{j} \underline{v}) \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Terme auf der rechten Seite von Gleichung (2.3) sind für das Plasma der Sonnenatmosphäre sehr klein und können meistens vernachlässigt werden (z.B. Priest, 1976). Der bei langsamen zeitlichen Veränderungen wichtigste Term $\underline{j}$ soll mit Hilfe der magnetischen Reynoldszahl $R_m = L_o v_o \mu_o / \eta$ abgeschätzt werden. Man erhält $R_m = 2 \cdot 10^8$ (A) bzw. $R_m = 2,6 \cdot 10^{10}$ (B). Beide Werte sind sehr groß, so daß der $\underline{j}$ -Term praktisch vernachlässigt werden kann. Bei dem Wert für die Leitfähigkeit wurden allerdings nur Coulomb-Stöße berücksichtigt (Spitzer, 1962). Bei Anwesenheit von Turbulenz treten auch Wellen-Teilchen-Wechselwirkungen auf, die zu anomaler Resistivität führen, welche meist viel größer ist als die Spitzer-Resistivität. Das Auftreten anomaler Resistivität soll hier zunächst nicht diskutiert werden (siehe Kapitel 4.1). Außerdem soll der dynamische Aufbau dünner Stromschichten nicht berücksichtigt werden (z.B. Priest, 1976), die eine viel kleinere Abmessung L_o haben.

Die MHD-Gleichungen werden ergänzt durch die Maxwellgleichungen unter Vernachlässigung des Verschiebungsstromes und bei Quasineutralität

$$\nabla \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad (2.6)$$

Die MHD-Gleichungen werden abgeschlossen durch die Zustandsgleichung für das ideale Gas

$$P = R \rho T \quad (2.7)$$

(mit $R = k_B/m_i$) und die Energiegleichung

$$\frac{\rho}{\gamma - 1} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \right) (P \rho^{-\gamma}) = \nabla \cdot (\underline{\alpha} \cdot \nabla T) + \eta \underline{j}^2 - L_r + H \quad (2.8)$$

Hierbei ist γ der Adiabatenkoeffizient, $\underline{\alpha}$ der Wärmeleitfähigkeitstensor und $\eta \underline{j}^2$ der Term der Ohmschen Heizung. L_r bezeichnet den Energieverlust durch elektromagnetische Strahlung, H faßt alle Terme zusammen, die zur externen Heizung beitragen, z.B. durch Absorption von MHD-Wellen. Eine detaillierte Diskussion findet man z.B. bei Priest (1982). Obwohl für eine vollständige Beschreibung der Strukturen in der Sonnenatmosphäre die Berücksichtigung des Wärmetransportes wichtig ist (z.B. Tandberg-Hansen, 1974), werden wir uns in dieser Behandlung auf zwei Spezialfälle beschränken:

1) Beim adiabatischen Fall ist die Wärmeleitung vernachlässigbar klein und die Heizungs- und Verlustterme sind entweder ausbalanciert oder ebenfalls vernachlässigbar klein. In diesem Fall verschwindet die rechte Seite von (2.8), so daß das Adiabatengesetz folgt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \right) (p_s^{-\gamma}) = 0 \quad (2.9)$$

Das Adiabatengesetz ist häufig erfüllt für dynamische Prozesse, bei denen die Wärmeleitung nicht schnell genug erfolgt.

2) Im anderen Fall wird die Temperatur als vorgegeben betrachtet. Dies ist gerechtfertigt für den stationären Fall, in dem wegen der hohen Wärmeleitfähigkeit die Temperatur im ganzen Raum konstant ist oder zumindest längs Feldlinien. Die letzte Bedingung kommt daher, daß die Wärmeleitfähigkeit in einem magnetisierten Plasma parallel zu den Feldlinien viel größer ist als senkrecht dazu (Spitzer, 1962).

Gleichungen (2.1) bis (2.9) bilden die Grundlage für die magnetohydrodynamische Beschreibung der großräumigen Struktur und Dynamik von Plasma-Magnetfeldstrukturen in der Sonnenatmosphäre. Die Grundgleichungen sollen nun weiter spezialisiert werden für langsame zeitliche Veränderungen.

Stationäre Zustände liegen näherungsweise dann vor, wenn die Zeitskala für Veränderungen groß ist gegenüber der Laufzeit von MHD-Wellen, die typisch $\tau_A \approx 14$ s (A) bzw. $\tau_A \approx 1$ s (B) beträgt. Dann kann die Zeitableitung in den Grundgleichungen vernachlässigt werden. Aus Gleichungen (2.1), (2.2), (2.3) bei

idealer Leitfähigkeit, (2.4) und (2.9) wird dann

$$\nabla \cdot (\underline{g} \underline{v}) = 0 \quad (2.10)$$

$$\underline{g} (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = \underline{j} \times \underline{B} - \nabla P - \underline{g} \nabla \psi \quad (2.11)$$

$$\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B} = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \underline{E} = 0 \quad (2.13)$$

$$\underline{v} \cdot \nabla (P \underline{g}^{-1}) = 0 \quad (2.14)$$

während die Maxwell-Gleichungen (2.5) und (2.6) unverändert gelten. (2.5), (2.6) sowie (2.10) bis (2.14) bilden die Grundgleichungen zur Beschreibung von Plasma-Magnetfeldstrukturen mit stationärer Strömung. Für den zweidimensionalen Spezialfall wurde von Tsinganos (1981; 1983) eine Lösungstheorie angegeben, diese Theorie wird auf den allgemeinen dreidimensionalen Fall in Kapitel 3.3 verallgemeinert.

Wenn die Strömungsgeschwindigkeit des stationären Plasmas klein ist gegenüber Alfvén- oder Schallgeschwindigkeit ($v_A = 7 \cdot 10^5$ m/s, $c_s = 1,6 \cdot 10^4$ m/s im Fall A), so sind zusätzlich alle Terme mit $\underline{v}$ vernachlässigbar. Beobachtete Strömungsgeschwindigkeiten während ruhiger Zeiten in der Photosphäre und Chromosphäre sind im folgenden zusammengestellt. Der Evershed-Fluß in der Penumbra hat etwa 6 bis 7 km/s, die Strömung in Surges oder Spiculen beträgt etwa 20 bis 30 km/s, großräumiger stationärer Fluß über Plages etwa 10 km/s (siehe Priest, 1982). Außerdem wird photosphärische Scherströmung im Zusammenhang mit Flares von 5 km/s gefunden (Zirin

und Tanaka, 1973). Alle diese Strömungsgeschwindigkeiten sind klein gegen die Geschwindigkeit von MHD-Wellen, so daß die statische Theorie angewandt werden kann. Während (2.1), (2.3), (2.4) und (2.9) jetzt trivial erfüllt sind, reduziert sich (2.2) zur statischen Bewegungsgleichung

$$\underline{j} \times \underline{B} - \nabla P - \rho \nabla \psi = 0 \quad (2.15)$$

und bildet mit (2.5) und (2.6) die Grundgleichungen für die statische Gleichgewichtstheorie. Schindler und Birn (1978) zeigten, daß diese Theorie quasistatische Entwicklung zuläßt, d.h. bei langsam zeitabhängigen Randbedingungen ($\partial/\partial t = O(\epsilon)$) ist die statische Theorie auch bis zu einer Zeit von der Ordnung $t = O(1/\epsilon)$ gültig.

2.2 Gleichgewichtstheorie

In diesem Abschnitt wird die bisher bekannte Lösungstheorie für statische MHD-Gleichgewichte zusammengefaßt. Wir beginnen mit der allgemeinen Darstellung von Magnetfeldern, die alle der Gleichung $\nabla \cdot \underline{B} = 0$ genügen müssen. Dieser Teil ist auch relevant für Gleichgewichte mit stationärer Strömung, die in Abschnitt 3.3 behandelt werden. Eine Übersicht über verschiedene Formen der Darstellung des Magnetfeldes gibt Stern (1976). Bei der Auswahl ist es zweckmäßig, eine Form zu wählen, bei der die Randbedingungen in einfacher Weise berücksichtigt werden können. Bei den hier betrachteten Plasma-Magnetfeldstrukturen sind die Feldlinien in der Konvektionszone unterhalb der Photosphäre verankert. In dieser Zone ist das Plasma sehr dicht ($n_e \gtrsim 10^{23} \text{ m}^{-3}$), fast voll ionisiert, und bei einer Temperatur von 10^4 K und

und einem Magnetfeld von 0,01 T ist das Plasma- $\beta \approx 350 \gg 1$. Damit sind die Feldlinien in dem gut leitenden Plasma eingefroren und werden bei subphotosphärischer Konvektion mitbewegt. Man erhält so als Randbedingung, daß die Lage der Feldlinien an der Photosphäre vorgegeben ist. Diese Randbedingung legt die Darstellung des Magnetfeldes durch Euler-Potentiale (Euler, 1769) nahe.

$$\underline{B}(\underline{r}) = \nabla \alpha(\underline{r}) \times \nabla \beta(\underline{r}) \quad (2.16)$$

Gibt man α und β als Dirichlet-Randbedingung vor, so ist damit die Lage der Feldlinien vorgegeben, denn $\nabla \alpha$ und $\nabla \beta$ stehen jeweils senkrecht auf $\underline{B}$. Stern (1970) wies nach, daß eine Darstellung von Magnetfeldern mit Eulerpotentialen zumindest lokal immer möglich ist, eine globale Darstellung kann allerdings die Einführung von Schnittebenen erfordern, um die Eindeutigkeit zu wahren.

Wir wählen für die numerische Rechnung eine Spezialisierung für ein translations-invariantes Feld (Sturrock und Woodbury, 1967)

$$\underline{B}(x, y) = \nabla \alpha(x, y) \times \nabla (\tilde{\beta}(x, y) + z) \quad (2.17)$$

Ein Nachteil dieses Ansatzes ist, daß an den Stellen, wo $\nabla \alpha$ Null ist, so daß das Magnetfeld in der x-y-Ebene verschwindet, automatisch auch die B_z -Komponente verschwindet. Bei Magnetfeldern mit $\nabla \alpha \neq 0$ ist dies keine Einschränkung der Allgemeinheit des Ansatzes (2.17); Fälle mit $\nabla \alpha = 0$ werden später diskutiert werden (Kapitel 4.2). Ein für die zweidimensionale Darstellung sehr häufig gebrauchter Ansatz ist (z.B. Low, 1975)

$$\underline{B}(x, y) = \nabla \alpha(x, y) \times \underline{e}_z + B_z(x, y) \underline{e}_z \quad (2.18)$$

Wie später gezeigt wird, folgt nach Einsetzen von (2.18) in die Bewegungsgleichung (2.15), daß B_z eine Funktion von α allein ist.

Wir beschränken uns bei den zweidimensionalen Spezialfällen auf translationsinvariante Gleichgewichte, es sei darauf hingewiesen, daß noch zwei andere Symmetrien möglich sind, nämlich Rotationssymmetrie und helische Symmetrie (Edenstrasser, 1980).

Wir wenden uns nun der Lösung der Bewegungsgleichung und der Maxwell-Gleichungen mit einer der oben angegebenen Darstellungen des Magnetfeldes zu. In diesem Abschnitt wird nur die Lösung der statischen MHD-Gleichung (2.15) mit (2.6) gezeigt, Gleichgewichte mit stationärer Strömung werden in Kapitel 3.3 behandelt. Mit dem allgemeinen dreidimensionalen Ansatz (2.16) für $\underline{B}$ erhält man aus (2.15)

$$\nabla \alpha (\nabla \beta \cdot \underline{j}) - \nabla \beta (\nabla \alpha \cdot \underline{j}) - \nabla P - g \nabla \psi = 0 \quad (2.19)$$

Daraus folgt, daß P eine Funktion von α , β und ψ ist. Man erhält das Gleichungssystem für α und β (z.B. Birn und Schindler, 1981)

$$\nabla \beta \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) = \mu_0 \frac{\partial P(\alpha, \beta, \psi)}{\partial \alpha} \quad (2.20)$$

$$-\nabla \alpha \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) = \mu_0 \frac{\partial P(\alpha, \beta, \psi)}{\partial \beta} \quad (2.21)$$

$$-g = \frac{\partial P}{\partial \psi} \quad (2.22)$$

Mit dem idealen Gasgesetz ergibt sich die Differentialgleichung für P

$$\frac{\partial P}{\partial \psi} = -\frac{P}{RT}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$P(\alpha, \beta, \psi) = P_0(\alpha, \beta) \exp\left(-\int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi'}{RT(\alpha, \beta, \psi')}\right) \quad (2.23)$$

wobei ψ_0 eine beliebige Konstante und $P_0(\alpha, \beta)$ eine frei wählbare Funktion ist. Um eine physikalisch sinnvolle Wahl für $P(\alpha, \beta, \psi)$ zu treffen, unterscheiden wir zwei Fälle: Gleichgewichte, bei denen alle Feldlinien den Rand des Grundgebietes schneiden, und solche mit ganz oder teilweise geschlossenen Feldlinien. Bei Gleichgewichten mit offenen Feldlinien kann $P(\alpha, \beta, \psi)$ als Randbedingung vorgeschrieben werden. Bei Gleichgewichten mit geschlossenen Feldlinien muß eine Zusatzbedingung für P angegeben werden, z. B. eine Adiabatenbedingung ähnlich (2.9), die auf jeder Flußröhre gilt (Grad et al., 1975). Bei unseren Betrachtungen gilt jedoch nur der Fall einer vorgegebenen Funktion $P(\alpha, \beta, \psi)$, und bei expliziten Rechnungen (Kapitel 4) werden weitgehend Gleichgewichte mit offenen Feldlinien behandelt.

Eine allgemeine mathematische Lösungstheorie zum Gleichungssystem (2.20), (2.21) existiert noch nicht. Parker (1979) zeigt für den Fall ohne Gravitation und für ein unendlich ausgedehntes Grundgebiet, daß alle Lösungen der statischen Kräftebilanz in mindestens einer Koordinatenrichtung invariant sind. Dieser Beweis ist für unseren Fall jedoch nicht relevant, da Plasma-Magnetfeldstrukturen in der Sonnenatmosphäre durch die Photosphäre begrenzt werden, wo (2.15) nicht unbedingt erfüllt ist. Dreidimensionale Gleichgewichtslösungen mit schwacher Abhängigkeit von mindestens einer Koordinate sind bekannt, z.B. von Birn (1980) für den Schweif der Magnetosphäre oder von Hu et al. (1983) für Sonnenflecken. Für

dreidimensionale kraftfreie Strukturen ($\underline{j} \times \underline{B} = 0$) liegen weitergehende theoretische Ergebnisse vor (Übersicht von Priest, 1983; Aly, 1983).

Umfassende Ergebnisse über Existenz, Eindeutigkeit und auch physikalische Stabilität von Lösungen von (2.15) liegen für den zweidimensionalen Spezialfall mit dem Ansatz (2.18) für $\underline{B}$ vor. Aus (2.15) erhält man

$$-\frac{1}{\mu_0} \Delta \alpha \nabla \alpha + \frac{1}{\mu_0} \nabla B_z \times \nabla \alpha - \frac{1}{\mu_0} B_z \nabla B_z - \nabla P - g \nabla \psi = 0$$

woraus folgt

$$-\Delta \alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\mu_0 P(\alpha, \psi) + \frac{B_z^2(\alpha)}{2} \right) \quad (2.24)$$

Diese Gleichung wird auch (jedenfalls für $\psi = \text{const.}$) als Grad-Shafranov-Gleichung bezeichnet. Mit den physikalisch relevanten Dirichlet-Randbedingungen für α folgt, daß P und auch B_z als Randbedingung an der Photosphäre vorgegeben werden können. Während dies für P leicht zu begründen ist (Druckreservoir), ist die Vorgabe von B_z unphysikalisch, weil die Tangentialkomponente von $\underline{B}$ nicht als Randbedingung vorgeschrieben werden kann (Jockers, 1978). Trotz dieses Nachteils wird die Grad-Shafranov-Gleichung wegen der gut entwickelten mathematischen Theorie von den weitaus meisten Autoren benützt.

2.3 Gleichgewichtsfolgen und kritische Punkte

Eine Übersicht über die Lösungstheorie zur Grad-Shafranov-Gleichung (2.24) findet man bei Birn und Schindler (1981) und bei Heyvaerts et al. (1980, 1982). Hier sollen nur die wichtigsten Ergebnisse zitiert werden, soweit sie für die spätere Anwendung

benötigt werden (Kapitel 4).

Wir führen an dieser Stelle einen Folgenparameter λ ein, der die von außen erzwungene zeitliche Entwicklung der Gleichgewichte beschreibt, wie in Abschnitt 1.3 geschildert. Gleichung (2.24) wird umgeschrieben als

$$-\Delta \alpha = F(\lambda; \alpha, x, y) \quad (2.25)$$

wobei für α von λ unabhängige Randbedingungen vorgegeben sind. Die Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von (2.25) hängen von F ab, wir unterscheiden drei Fälle:

$$a) \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} < 0 \quad (2.26)$$

Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen für α . Es gibt immer eine eindeutige Lösung von (2.25) (Courant und Hilbert, 1962).

$$b) \quad F \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} > 0, \quad F \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} \geq 0 \quad (2.27)$$

für alle λ, α , und es sind Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben. Dann existiert ein $\lambda = \lambda^*$, so daß es für $\lambda > \lambda^*$ keine Lösung gibt und für $\lambda < \lambda^*$ mehr als eine Lösung (Amann, 1976; Crandall und Rabinowitz, 1975; Birn et al., 1978). Ein typisches Lösungsdiagramm für diesen Fall zeigt Abb. 1.3c. Die Kurve biegt sich bei $\lambda = \lambda^*$ zurück, was als kritischer Punkt oder Katastrophenpunkt im Sinne der Katastrophentheorie interpretiert werden kann (Thom, 1975). Von Birn et al. (1978) wurden kritische Punkte einer Gleichgewichtsfolge als Einsatzpunkt eines eruptiven Prozesses, wie z.B. einer Sonneneruption vorgeschlagen.

$$c) F = \lambda f(\alpha) \quad (2.28)$$

wobei für die stetig differenzierbare Funktion $f(\alpha)$ gilt

$$f(\alpha) = \begin{cases} > 0 & \text{für } 0 \leq \alpha \leq \alpha_0, \alpha_0 = \text{const.} \\ = 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (2.29)$$

Das Lösungsgebiet ist ein Halbraum mit Dirichlet-Randbedingung auf der Begrenzung. Dann gibt es Lösungen für alle λ , man erhält typischerweise ein Lösungsdiagramm wie in Abb. 1.3d.

Die Gleichgewichte auf dem unteren Lösungsast bis $\lambda = \lambda^*$ haben eine geschlossene Magnetfeldtopologie, während die auf dem oberen Lösungsast eine offene Feldstruktur zeigen (Heyvaerts et al., 1980; 1982).

Die Theorie quasistatischer Gleichgewichtsfolgen ist nur dann für die Anwendung sinnvoll, wenn Einsatzzpunkte auf stabilem Wege erreicht werden können. Die Stabilitätsanalyse erfolgt mit Hilfe von Variationsfunktionalen, deren Vorzeichen des Minimums über Stabilität gegen kleine Störungen bestimmen:

$$\delta W > 0 \Rightarrow \text{Stabilität}$$

$$\delta W < 0 \Rightarrow \text{Instabilität} \quad (2.30)$$

Eine allgemeine Aussage über die Stabilität von MHD-Gleichgewichten ist zur Zeit nur möglich für zweidimensionale statische Gleichgewichte und bei Beschränkung auf zweidimensionale Störungen (Schindler et al., 1983). Das Stabilitätsfunktional δW läßt sich in diesem Fall aufspalten in zwei Terme

$$\delta W = \delta^2 F + \delta G \quad (2.31)$$

wobei

$$\delta^2 F = \frac{1}{2\mu_0} \int \left[|\nabla A_1|^2 - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left(\mu_0 P(\alpha, \psi) + \frac{B_z^2(\alpha)}{2} |A_1|^2 \right) \right] d\tau \quad (2.32)$$

A_1 ist eine beliebige zweidimensionale Störung des Gleichgewichtspotentials α . Es kann gezeigt werden, daß δG positiv ist für Instabilitäten, die durch verschiedene Theorien beschrieben werden:

- 1) ideale MHD, $\partial g / \partial \psi \leq -g^2 / \gamma^* P$, γ^* = Adiabatenkoeffizient
- 2) resistive MHD, ohne Gravitationskraft, $B_z = \text{const.}$,
 $\nabla \cdot \underline{v} = 0$, $d\eta/dt = 0$ oder $\underline{B} \cdot \nabla \eta = 0$
- 3) Vlasov-Theorie, keine Gravitation, $B_z = \text{const.}$

In diesen Fällen bildet $\delta^2 F$ ein hinreichendes Stabilitätsfunktional. Gleichgewichtslösungen mit $\delta^2 F > 0$ sind zweidimensional stabil. Lösungen mit $\delta^2 F < 0$ werden als F-instabil bezeichnet.

3. Beiträge zur Theorie stationärer Plasmastrukturen

3.1 Statische Gleichgewichte und Gradsches Energiefunktional

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie die Grundgleichungen für statische MHD-Gleichgewichte (2.20), (2.21) hergeleitet werden können aus der isobaren Variation des Gradschen Energiefunktional (Grad, 1964):

$$F = \int \left(\frac{B^2}{2\mu_0} - p \right) d^3r \quad (3.1)$$

Die Herleitung der Gleichgewichtsbedingung mit Hilfe eines Variationsprinzips hat den Vorteil, daß auf natürlichem Wege Randbedingungen gewonnen werden. Außerdem wird die zweite Variation des Gradschen Funktional hergeleitet. Die zweite Variation gibt an, ob die durch (3.1) definierte Freie Energie des Systems bei kleinen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage minimal oder maximal ist. Im nächsten Abschnitt wird behandelt werden, welche Aussagen über die physikalische Stabilität die zweite Variation des Gradschen Funktional erlaubt. In Abschnitt 4.4 wird gezeigt, daß die zweite Variation Bestandteil eines numerischen Verfahrens zur Berechnung von Gleichgewichtslösungen ist. Man erhält so mit dem numerischen Verfahren gleichzeitig eine Stabilitätsanalyse der Gleichgewichte.

Das Gradsche Funktional für statische Gleichgewichte mit der Darstellung des Magnetfeldes durch Euler-Potentiale (2.16) lautet

$$F[\alpha, \beta] = \int \left(\frac{(\nabla \alpha \times \nabla \beta)^2}{2\mu_0} - p(\alpha, \beta, \psi) \right) d^3r \quad (3.2)$$

Die Abhängigkeit $P(\alpha, \beta, \psi)$ folgt direkt aus der Kräftebilanz (2.15), wie in Abschnitt 2.2 gezeigt wurde. Das Funktional F wird variiert mit

$$\alpha \rightarrow \alpha + \delta \cdot \alpha_1, \quad \beta \rightarrow \beta + \delta \cdot \beta_1, \quad \delta \ll 1 \quad (3.3)$$

Aus (3.2) folgt die Entwicklung

$$\begin{aligned} \Delta F &= F[\alpha + \delta \cdot \alpha_1, \beta + \delta \cdot \beta_1] - F[\alpha, \beta] \\ &= \delta \int \left[\frac{1}{\mu_0} (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \cdot (\nabla \alpha_1 \times \nabla \beta + \nabla \alpha \times \nabla \beta_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial P}{\partial \alpha} \alpha_1 - \frac{\partial P}{\partial \beta} \beta_1 \right] d^3r \\ &+ \delta^2 \int \left[\frac{1}{2\mu_0} (\nabla \alpha_1 \times \nabla \beta + \nabla \alpha \times \nabla \beta_1)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \cdot (\nabla \alpha_1 \times \nabla \beta_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2} \alpha_1^2 - \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha \partial \beta} \alpha_1 \beta_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \beta^2} \beta_1^2 \right] d^3r + O(\delta^3) \quad (3.4) \end{aligned}$$

Nach partieller Integration folgt für den Term mit dem Faktor δ :

$$\begin{aligned} \delta F &= \int \left[\alpha_1 \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \beta \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) - \frac{\partial P}{\partial \alpha} \right) \right. \\ &\quad \left. + \beta_1 \left(-\frac{1}{\mu_0} \nabla \alpha \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) - \frac{\partial P}{\partial \beta} \right) \right] d^3r \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \oint \underline{n} \cdot \left[\alpha_1 \nabla \beta \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) - \beta_1 \nabla \alpha \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \right] dS \quad (3.5) \end{aligned}$$

Nullsetzen von δF liefert die Gleichgewichtsbedingung, weil dann der Integrand des Volumenintegrals für alle α_1, β_1 verschwinden muß, so daß die Gleichungen (2.20), (2.21) folgen. Dazu muß das Oberflächenintegral verschwinden, was die Randbedingungen für Gleichgewichtslösungen liefert. Das Integral wird Null unter folgenden Bedingungen:

Randbedingung I

$$\alpha_1 \Big|_{\partial\Omega} = \beta_1 \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.6)$$

Für diesen Fall liegen Dirichlet-Randbedingungen für α und β vor. Weil α und β längs Feldlinien konstant sind, bedeutet dies, daß die Lage der Feldlinien am Rand fixiert ist.

Randbedingung II

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot \nabla \alpha \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) &= \nabla \alpha \cdot (\underline{B} \times \underline{n}) \\ &= (\underline{n} \cdot \nabla \alpha) (\nabla \alpha \cdot \nabla \beta) - (\underline{n} \cdot \nabla \beta) (\nabla \alpha)^2 = 0 \\ \underline{n} \cdot \nabla \beta \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) &= \nabla \beta \cdot (\underline{B} \times \underline{n}) \\ &= (\underline{n} \cdot \nabla \alpha) (\nabla \beta)^2 - (\underline{n} \cdot \nabla \beta) (\nabla \alpha \cdot \nabla \beta) = 0 \end{aligned}$$

Beide Bedingungen sind immer erfüllt, wenn das Magnetfeld $\underline{B}$ parallel zum Normalvektor $\underline{n}$ der Berandung ist. Diese Randbedingung wird i.a. natürliche Randbedingung genannt, sie läßt sich formulieren als

$$\underline{n} \times \underline{B} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \beta}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.7)$$

Damit ist gezeigt, wie aus der ersten Variation des Gradschen Energiefunktionalis die Gleichgewichtsbedingung folgt und welchen Randbedingungen deren Lösung genügen muß.

Die zweite Variation des Funktionalis folgt aus dem δ^2 -Term in (3.4):

$$\delta^2 F = \frac{1}{2\mu_0} \int \left[(\nabla \alpha_1 \times \nabla \beta + \nabla \alpha \times \nabla \beta_1)^2 + 2 (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \cdot (\nabla \alpha_1 \times \nabla \beta_1) - \mu_0 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2} \alpha_1^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha \partial \beta} \alpha_1 \beta_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial \beta^2} \beta_1^2 \right) \right] d^3 r \quad (3.8)$$

Das Vorzeichen des Minimums dieses Funktionals sagt aus, ob die Gradsche Freie Energie im Gleichgewicht minimal oder maximal ist. Allein aus der Tatsache, daß die erste Variation von F die Gleichgewichtsbedingung (2.20), (2.21) liefert, kann jedoch nicht geschlossen werden, daß $\delta^2 F$ ein Kriterium für physikalische Stabilität ist. Die Beziehung zur physikalischen Stabilitätsanalyse im Rahmen der idealen Magnetohydrodynamik wird in Abschnitt 3.2 diskutiert werden.

Das Gradsche Energiefunktional wird jetzt spezialisiert auf den zweidimensionalen Fall mit dem Ansatz der Eulerpotentiale (2.17). Dazu wird zunächst die Kräftebilanz (2.15) betrachtet, aus der wir die Druckfunktion P näher bestimmen können. Gleichung (2.19) mit dem Ansatz (2.17) wird zu

$$\begin{aligned} \nabla \alpha (\nabla \tilde{\beta} \cdot \underline{j} + \underline{e}_z \cdot \underline{j}) - \nabla \tilde{\beta} (\nabla \alpha \cdot \underline{j}) \\ - \underline{e}_z (\nabla \alpha \cdot \underline{j}) - \nabla P - \rho \nabla \psi = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Weil P und ψ keine z-Abhängigkeit besitzen, muß die $\underline{e}_z$ -Komponente von (3.9) verschwinden, so daß $\nabla \alpha \cdot \underline{j} = 0$. Außerdem folgt, daß P nur eine Funktion von α und ψ ist. Damit erhält man die Gleichgewichtsbedingung

$$\nabla \tilde{\beta} \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) - \Delta \alpha = \mu_0 \frac{\partial P(\alpha, \psi)}{\partial \alpha} \quad (3.10)$$

$$\nabla \alpha \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) = 0 \quad (3.11)$$

Das zugehörige Gradsche Energiefunktional lautet in Analogie zu (3.2)

$$\tilde{F}[\alpha, \tilde{\beta}] := \int \left[\frac{(\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta})^2}{2\mu_0} + \frac{(\nabla \alpha)^2}{2\mu_0} - P(\alpha, \psi) \right] dx dy \quad (3.12)$$

Das Funktional F wird variiert mit dem Ansatz (3.3), wobei β durch $\tilde{\beta}$ ersetzt wird, so daß sich die Entwicklung ergibt

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{F} &= \tilde{F}[\alpha + \delta \alpha_1, \tilde{\beta} + \delta \tilde{\beta}_1] - \tilde{F}[\alpha, \tilde{\beta}] \\ &= \delta \int \left[\frac{1}{\mu_0} (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) \cdot (\nabla \alpha_1 \times \nabla \tilde{\beta} + \nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} \nabla \alpha_1 \cdot \nabla \alpha - \frac{\partial P}{\partial \alpha} \alpha_1 \right] dx dy \\ &\quad + \delta^2 \int \left[\frac{1}{2\mu_0} (\nabla \alpha_1 \times \nabla \tilde{\beta} + \nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}_1)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) \cdot (\nabla \alpha_1 \times \nabla \tilde{\beta}_1) + \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \alpha_1)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2} \alpha_1^2 \right] dx dy + O(\delta^3) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Der δ -Term, zu Null gesetzt, liefert wieder die Gleichgewichtsbedingung. Dazu wird dieser Term partiell integriert

$$\begin{aligned} \delta \tilde{F} &= \int \left[\alpha_1 \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \tilde{\beta} \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) - \frac{1}{\mu_0} \Delta \alpha - \frac{\partial P}{\partial \alpha} \right) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\beta}_1 \frac{1}{\mu_0} \nabla \alpha \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) \right] dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2\mu_0} \oint_{\partial V} \left[\alpha_1 (\nabla \tilde{\beta} \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) + \nabla \alpha) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\beta}_1 \nabla \alpha \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) \right] dS \end{aligned} \quad (3.14)$$

Aus dem Integranden des Volumenintegrals folgen wieder die Gleichungen für das Gleichgewicht (3.10), (3.11). Dazu muß das

Oberflächenintegral verschwinden, was für folgende Randbedingungen erfüllt ist:

Randbedingung I

$$\alpha_1 \Big|_{\partial\Omega} = \tilde{\beta}_1 \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.15)$$

Dieser Fall entspricht Dirichlet-Randbedingungen, d.h. die Lage der Feldlinien am Rand ist festgelegt.

Randbedingung II

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot \nabla \tilde{\beta} \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) + \underline{n} \cdot \nabla \alpha &= \\ (\underline{n} \cdot \nabla \alpha) ((\nabla \tilde{\beta})^2 + 1) - (\underline{n} \cdot \nabla \tilde{\beta})(\nabla \alpha \cdot \nabla \tilde{\beta}) &= 0 \\ \underline{n} \cdot \nabla \alpha \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) &= \\ (\underline{n} \cdot \nabla \alpha)(\nabla \alpha \cdot \nabla \tilde{\beta}) - (\underline{n} \cdot \nabla \tilde{\beta})(\nabla \alpha)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist erfüllt für

$$\frac{\partial \alpha}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.16)$$

was wie bei (3.7) bedeutet, daß $\underline{B}$ senkrecht zur Berandung ist.

Die zweite Variation der Gradschen Freien Energie folgt aus

(3.13)

$$\begin{aligned} \delta^2 \tilde{F} &= \frac{1}{2\mu_0} \int \left[(\nabla \alpha_1 \times \nabla \tilde{\beta} + \nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}_1)^2 \right. \\ &\quad + 2 (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) \cdot (\nabla \alpha_1 \times \nabla \tilde{\beta}_1) + (\nabla \alpha_1)^2 \\ &\quad \left. - \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2} \alpha_1^2 \right] dx dy \quad (3.17) \end{aligned}$$

Die physikalische Bedeutung des Funktional (3.17) wird ebenfalls im nächsten Abschnitt diskutiert werden.

3.2 Stabilitätsanalyse statischer Gleichgewichte

3.2.1 Stabilität dreidimensionaler statischer Gleichgewichte

Für zweidimensionale Gleichgewichte existiert eine umfangreiche Theorie für die Stabilitätsanalyse gegen zweidimensionale Störungen (Schindler et al., 1983), die schon in Kapitel 2.2 behandelt wurde. Eine allgemeine Stabilitätsanalyse dreidimensionaler Gleichgewichte ist schwieriger. Sie wurde im Rahmen der idealen Magnetohydrodynamik von Bernstein et al. (1958) und Hain et al. (1957) formuliert. Für resistive Magnetohydrodynamik ist nur eine Stabilitätsanalyse für den hier uninteressanten Fall stromfreier Magnetfelder bekannt (Barston, 1970), für die Vlasov-Theorie existiert nicht einmal eine dreidimensionale Gleichgewichtstheorie.

In diesem Abschnitt wird das Stabilitätsverhalten dreidimensionaler statischer Gleichgewichte gegen kleine Störungen aus der Ruhelage im Rahmen der idealen MHD untersucht. Dazu wird das Variationsprinzip der idealen MHD für unsere Zwecke umformuliert. Die Gleichgewichtslösungen werden durch Euler-Potentiale dargestellt, und in dieser Darstellung wird die Bedeutung der zweiten Variation des Gradschen Funktionalen klar. In Abschnitt 3.4 wird gezeigt, daß diese Formulierung eine relativ einfach durchzuführende Stabilitätsanalyse als Ergänzung eines Verfahrens zur numerischen Berechnung von Gleichgewichtslösungen ermöglicht.

Die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen ξ aus der statischen Gleichgewichtslage ist

$$\begin{aligned} \delta \underline{\xi} = \underline{F}(\underline{\xi}) = & -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \underline{B}_1) \times \underline{B} \\ & + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B}_1 - g_1 \nabla \psi \end{aligned} \quad (3.18)$$

wobei die Größen ohne Index die Gleichgewichtsgrößen sind und die mit Index 1 die gestörten Größen:

$$p_1 := -\underline{\xi} \cdot \nabla p - p \nabla \cdot \underline{\xi} \quad (3.19)$$

$$g_1 := -\underline{\xi} \cdot \nabla g - g \nabla \cdot \underline{\xi} \quad (3.20)$$

$$\underline{B}_1 := \nabla \times (\underline{\xi} \times \underline{B}) \quad (3.21)$$

Das System ist stabil, wenn das Funktional

$$\begin{aligned} \delta W[\underline{\xi}] &:= -\frac{1}{2} \int \underline{\xi}^* \cdot \underline{F}(\underline{\xi}) d^3r \\ &= \frac{1}{2} \int \left[\underline{\xi}^* \cdot \nabla p_1 - \frac{1}{\mu_0} \underline{\xi}^* \cdot ((\nabla \times \underline{B}_1) \times \underline{B}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\mu_0} \underline{\xi}^* \cdot ((\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B}_1) + g_1 \underline{\xi}^* \cdot \nabla \psi \right] d^3r \end{aligned} \quad (3.22)$$

positiv definit ist für alle $\underline{\xi}$. Für $\underline{\xi}$ werden auch komplexe Störungen zugelassen.

Für $\underline{B}$ und $\underline{B}_1$ wird jetzt die Darstellung in Eulerpotentialen angesetzt. Ziel dieser Darstellung ist, δW in zwei Summanden $\delta^2 F$ und δQ aufzuspalten, wobei δQ positiv ist und $\delta^2 F$ nur von Magnetfeldgrößen abhängt, analog zum zweidimensionalen Fall aus Kapitel 2.2 (Gl. 2.31). $\underline{B}_1$ aus (3.21) wird zu

$$\begin{aligned} \underline{B}_1 &= \nabla \times (\underline{\xi} \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta)) \\ &= -\nabla \alpha \times \nabla (\underline{\xi} \cdot \nabla \beta) + \nabla \beta \times \nabla (\underline{\xi} \cdot \nabla \alpha) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Es liegt nahe zu definieren

$$\alpha_1 := - \underline{\xi} \cdot \nabla \alpha \quad (3.24)$$

$$\beta_1 := - \underline{\xi} \cdot \nabla \beta \quad (3.25)$$

so daß man erhält

$$\underline{\beta}_1 = \nabla \alpha_1 \times \nabla \beta + \nabla \alpha \times \nabla \beta_1 \quad (3.26)$$

Aus (3.19) wird mit (3.24) und (3.25)

$$p_1 = \frac{\partial P}{\partial \alpha} \alpha_1 + \frac{\partial P}{\partial \beta} \beta_1 + \rho \underline{\xi} \cdot \nabla \psi - \rho \nabla \cdot \underline{\xi} \quad (3.27)$$

Aus (3.20) wird

$$\rho_1 = - \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \alpha_1 - \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \beta_1 + \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \underline{\xi} \cdot \nabla \psi - \rho \nabla \cdot \underline{\xi} \quad (3.28)$$

Die Terme des Integrals (3.22) werden mit (3.24) und (3.25) umgeformt und gegebenenfalls partiell integriert. Man erhält

$$\begin{aligned} \int \underline{\xi}^* \cdot \nabla p_1 \, d^3r &= - \rho \int \underline{\xi}^* \cdot \nabla (P \nabla \cdot \underline{\xi}) \, d^3r \\ &\quad + \int \underline{\xi}^* \cdot \nabla \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha} \alpha_1 + \frac{\partial P}{\partial \beta} \beta_1 + \rho \underline{\xi} \cdot \nabla \psi \right) d^3r \\ &= \oint \underline{n} \cdot \left[- \rho \underline{\xi}^* P \nabla \cdot \underline{\xi} + \underline{\xi}^* \rho \underline{\xi} \cdot \nabla \psi \right] dS \\ &\quad + \int \left[\rho P |\nabla \cdot \underline{\xi}|^2 + \underline{\xi}^* \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha} \nabla \alpha_1 + \frac{\partial P}{\partial \beta} \nabla \beta_1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \rho (\underline{\xi} \cdot \nabla \psi) \nabla \cdot \underline{\xi}^* \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2} |\alpha_1|^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial \beta^2} 2 \operatorname{Re}(\alpha_1 \beta_1^*) + \frac{\partial^2 P}{\partial \beta^2} |\beta_1|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha \partial \psi} \alpha_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial \beta \partial \psi} \beta_1 \right) \underline{\xi} \cdot \nabla \psi \right] d^3r \quad (3.29) \end{aligned}$$

$\operatorname{Re}(\cdot)$ bezeichnet den Realteil des Arguments, $\operatorname{Im}(\cdot)$ den Imaginärteil (wird später eingeführt).

$$\begin{aligned}
 - \int \underline{\xi}^* \cdot ((\nabla \times \underline{B}_1) \times \underline{B}) d^3r &= \oint \underline{n} \cdot [\underline{B}_1 \times (\underline{\xi}^* \times \underline{B})] dS \\
 &+ \int |\underline{B}_1|^2 d^3r \\
 &= \oint \underline{n} \cdot [(-\alpha_1^* \nabla \beta + \beta_1^* \nabla \alpha) \times (\nabla \alpha_1 \times \nabla \beta) + \nabla \alpha \times \nabla \beta_1] dS \\
 &+ \int |\nabla \alpha_1 \times \nabla \beta + \nabla \alpha \times \nabla \beta_1|^2 d^3r \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Mit der Gleichgewichtsbedingung (2.20), (2.21) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 - \int \underline{\xi}^* \cdot ((\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B}_1) d^3r &= \int [\alpha_1^* \nabla \beta_1 \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \\
 &- \beta_1^* \nabla \alpha_1 \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \\
 &- (\underline{\xi}^* \cdot \nabla \alpha_1) \mu_0 \frac{\partial P}{\partial \alpha} - (\underline{\xi}^* \cdot \nabla \beta_1) \mu_0 \frac{\partial P}{\partial \beta}] d^3r \\
 &= \oint \underline{n} \cdot [(-\alpha_1^* \nabla \beta_1 + \beta_1^* \nabla \alpha_1) \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta)] dS \\
 &+ \int [2 (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \cdot \text{Re} (\nabla \alpha_1^* \times \nabla \beta_1) \\
 &- (\underline{\xi}^* \cdot \nabla \alpha_1) \mu_0 \frac{\partial P}{\partial \alpha} - (\underline{\xi}^* \cdot \nabla \beta_1) \mu_0 \frac{\partial P}{\partial \beta}] d^3r \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \mathcal{P}_1 \underline{\xi}^* \cdot \nabla \psi d^3r &= \int [-\mathcal{P} (\underline{\xi}^* \cdot \nabla \psi) \nabla \cdot \underline{\xi} \\
 &+ (\underline{\xi}^* \cdot \nabla \psi) (\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \alpha} \alpha_1 + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \beta} \beta_1) - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \psi} |\underline{\xi} \cdot \nabla \psi|^2] d^3r \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

Addiert man die Terme (3.29) bis (3.32), so ergibt sich die gewünschte Aufspaltung

$$\begin{aligned}
 \delta W[\underline{\xi}] &= \delta^2 F[\alpha_1, \beta_1] + \delta Q[\underline{\xi}] + \\
 &+ \delta S_F[\alpha_1, \beta_1] + \delta S_Q[\underline{\xi}] \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \delta^2 F &= \frac{1}{2\mu_0} \int [(\nabla \alpha_1 \times \nabla \beta + \nabla \alpha \times \nabla \beta_1)^2 + 2 (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \cdot \text{Re} (\nabla \alpha_1^* \times \nabla \beta_1) \\
 &- \mu_0 (\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha^2} |\alpha_1|^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha \partial \beta} \text{Re}(\alpha_1 \beta_1^*) + \frac{\partial^2 P}{\partial \beta^2} |\beta_1|^2)] d^3r \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

Dies entspricht der zweiten Variation der Gradschen Freien Energie (3.5) für komplexe Störungen α_1, β_1 . Der Term δQ ist gegeben durch

$$\delta Q = \frac{1}{2} \int [\gamma P |\nabla \cdot \underline{\xi}|^2 - \frac{\partial \rho}{\partial \psi} |\underline{\xi} \cdot \nabla \psi|^2 - 2 \rho (\underline{\xi} \cdot \nabla \psi) \nabla \cdot \underline{\xi}^*] d^3r \quad (3.35)$$

und die beiden Oberflächenterme sind

$$\begin{aligned} \delta S_F = \frac{1}{2\mu_0} \oint \underline{n} \cdot [& \alpha_1^* (-\nabla \beta \times (\nabla \alpha_1 \times \nabla \beta + \nabla \alpha \times \nabla \beta_1) - \nabla \beta_1 \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta)) \\ & + \beta_1^* (\nabla \alpha \times (\nabla \alpha_1 \times \nabla \beta + \nabla \alpha \times \nabla \beta_1) + \nabla \alpha_1 \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta))] dS \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\delta S_Q = \frac{1}{2} \oint \underline{n} \cdot [\underline{\xi}^* \rho (\underline{\xi} \cdot \nabla \psi) - \rho \underline{\xi}^* \nabla \cdot \underline{\xi}] dS \quad (3.37)$$

Um die Stabilitätseigenschaften der Gleichgewichte sinnvoll untersuchen zu können, muß das System energetisch abgeschlossen sein. Das heißt, daß die Oberflächenintegrale verschwinden müssen, die die Summe des Energietransportes sind. Aus der Bedingung, daß die Integrale δS_F und δS_Q Null sind, erhält man so die physikalisch sinnvollen Randbedingungen. Der mathematische Grund ist, daß diese Randbedingungen gelten müssen, damit der Operator $\underline{F}$ aus Gl. (3.18) selbstadjungiert ist.

Der Übersichtlichkeit halber wird nun die Stabilitätstheorie von Gleichgewichten mit und ohne Gravitationskräfte getrennt behandelt.

a) Stabilitätskriterium für Gleichgewichte ohne Gravitation

Für den Fall, daß Gravitationskräfte verschwinden ($\psi = \text{const.}$), vereinfacht sich δQ (3.35) zu

$$\delta Q = \frac{\gamma^*}{2} \int P |\nabla \cdot \underline{\xi}|^2 d^3r \quad (3.38)$$

der Oberflächenterm δS_Q wird

$$\delta S_Q = -\frac{\gamma^*}{2} \int \underline{n} \cdot \underline{\xi}^* P (\nabla \cdot \underline{\xi}) dS \quad (3.39)$$

während $\delta^2 F$ und δS_F unverändert bleiben. Die in der Stabilitätsanalyse der idealen MHD meistens benutzte Randbedingung ist, daß die Störung $\underline{\xi}$ am Rand verschwindet:

$$\underline{\xi} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \quad (3.40)$$

Diese Randbedingung bedeutet physikalisch, daß keine Teilchen aus dem Gebiet ein- oder ausströmen ($\underline{n} \cdot \underline{\xi} = 0$) und daß kein elektrisches Feld am Rand vorliegt ($\underline{\xi} \times \underline{B} = 0$). δS_Q (3.39) verschwindet damit identisch, der andere Oberflächenterm δS_F wird zu Null, weil α_1 und β_1 wegen (3.24), (3.25) am Rand Null sind.

δQ ist für den Fall ohne Gravitation für alle $\underline{\xi}$ positiv definit. Man erhält so mit $\delta^2 F$ ein hinreichendes Kriterium für Stabilität, d.h. wenn $\delta^2 F$ positiv ist, ist das Gleichgewicht stabil; wenn andererseits $\delta^2 F$ nicht positiv definit ist, ist keine Aussage möglich. Damit ist die dreidimensionale Analogie zum Gradschen Energiefunktional für zweidimensionale Gleichgewichte (Gl. 2.31) und Stabilität gegen zweidimensionale Störungen hergestellt.

Wir behandeln nun eine alternative Randbedingung, bei der δS_Q und

δS_F unabhängig voneinander verschwinden und bei der Teilchen-
austausch durch die Begrenzung in eingeschränktem Umfang möglich
ist. δS_Q wird Null durch die Vorgabe der Randbedingung

$$\nabla \cdot \underline{\xi} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.41)$$

Das zweite Oberflächenintegral δS_F verschwindet für verschie-
dene Arten der Randbedingung. Eine Möglichkeit ist die Annahme
von Dirichlét-Randbedingungen

$$\alpha_1 \Big|_{\partial\Omega} = \beta_1 \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.42)$$

Die bedeutet, analog zu den Dirichlét-Randbedingungen für die
Gleichgewichte (3.6), daß die Lage der Feldlinien am Rand fest-
gelegt ist. Legt man α_1 und β_1 nicht explizit fest, so bekommt
man die natürlichen Randbedingungen, unter denen das Oberflächen-
integral verschwindet:

$$\begin{aligned} 0 &= \underline{n} \cdot \left[\nabla \beta \times (\nabla \alpha_1 \times \nabla \beta + \nabla \alpha \times \nabla \beta_1) + \nabla \beta_1 \times \underline{B} \right] \\ &= \nabla \beta \cdot (\underline{B}_1 \times \underline{n}) + \nabla \beta_1 \cdot (\underline{B} \times \underline{n}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \underline{n} \cdot \left[\nabla \alpha \times (\nabla \alpha_1 \times \nabla \beta + \nabla \alpha \times \nabla \beta_1) + \nabla \alpha_1 \times \underline{B} \right] \\ &= \nabla \alpha \cdot (\underline{B}_1 \times \underline{n}) + \nabla \alpha_1 \cdot (\underline{B} \times \underline{n}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Sinnvoll werden diese Randbedingungen kombiniert mit homogenen
Neumann-Randbedingungen (3.7) für das Gleichgewicht, so daß die
letzten Terme in (3.43), (3.44) wegfallen, man erhält

$$\underline{n} \times \underline{B} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.45)$$

so daß das gestörte Magnetfeld senkrecht zum Rand ist. Dies ist
wegen (3.7) gleichbedeutend mit den homogenen Neumann-Randbe-
dingungen

$$\left. \frac{\partial \alpha_1}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = \left. \frac{\partial \beta_1}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = 0 \quad (3.46)$$

Die Randbedingung (3.41) erlaubt, $\nabla \cdot \underline{\xi}$ als neue Variable einzuführen, so daß der $\nabla \cdot \underline{\xi}$ -Term in δQ (Gl. 3.38) separat minimiert werden kann und so Null ergibt. Für die alternativen Randbedingungen (3.41) mit (3.42) und (3.46) erhält man damit

$$\delta W [\underline{\xi}] = \delta^2 F [\alpha_1, \beta_1] \quad (3.47)$$

Die Störung in der Teilchenposition ist im Funktional $\delta^2 F$ nicht mehr vorhanden. Bei der Randbedingung (3.41) muß deshalb folgendes beachtet werden: Aus den Definitionen (3.24), (3.25) folgt, daß die Funktionen α_1, β_1 Null werden, wenn $\nabla \alpha$ oder $\nabla \beta$ Null werden. Dies ist genau an Neutralpunkten der Fall, an denen das Magnetfeld verschwindet. Diese Bedingung für α_1, β_1 muß nicht berücksichtigt werden, wenn $\underline{\xi}$ noch im Variationsprinzip vorhanden ist. In diesem Fall würde $\underline{\xi}$ divergieren, wenn α_1 oder β_1 an Neutralpunkten nicht ebenfalls verschwände und so das Minimum des entsprechenden Funktionalen anhöbe. Man erhält so die Einschränkung der Funktionenklasse von α_1, β_1 , daß $\alpha_1 = 0$ sein muß, wo $\nabla \alpha = 0$, und $\beta_1 = 0$, wo $\nabla \beta = 0$. In diesem Fall ist das Funktional $\delta^2 F$ für die Randbedingung (3.41) und (3.42) bzw. (3.46) notwendig und hinreichend. Die Einschränkung der Funktionenklasse ist bei analytischer Auswertung leicht zu realisieren und läßt sich bei numerischer Auswertung relativ leicht in das Verfahren einbeziehen.

Aus den Betrachtungen folgt, daß die δW minimierende Mode inkompressibel ist. Bei inkompressibler Bewegung wird keine Arbeit zur Kompression des Plasmas benötigt. Diese instabile Mode kann

jedoch nur realisiert werden, wenn geeignete Randbedingungen vorliegen, bei denen Strömung durch die Berandung möglich ist, wie sie hier durch (3.41) gegeben sind.

b) Stabilitätskriterium für Gleichgewichte mit Gravitationskraft

Für den Fall endlicher Gravitationskräfte ist δQ durch die Gleichung (3.35) gegeben. Es ist zweckmäßig, δQ umzuformen zu

$$\delta Q = \frac{1}{2} \int \left[\left(\gamma^2 P + \frac{\varrho^2}{\partial \varrho / \partial \psi} \right) |\nabla \cdot \underline{\xi}|^2 - \frac{\partial \varrho}{\partial \psi} \left| \underline{\xi} \cdot \nabla \psi + \frac{\varrho}{\partial \varrho / \partial \psi} \nabla \cdot \underline{\xi} \right|^2 \right] d^3 r \quad (3.48)$$

Wir beginnen wieder mit der "klassischen" Randbedingung (3.40), bei der $\underline{\xi}$ am Rand verschwindet. Der Oberflächenterm δS_Q (3.37) wird trivial Null, δS_F (3.36) verschwindet, weil $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ folgt. Der wesentliche Unterschied zum Fall ohne Gravitation ist, daß δQ nicht ohne weiteres positiv ist, man erhält eine Zusatzbedingung an das Gleichgewicht. $\partial \varrho / \partial \psi$ muß negativ oder Null sein, z.B. muß bei konstanter Schwerkraft die Dichte mit wachsender Höhe gleich bleiben oder abnehmen. Der Faktor $\gamma^2 P + \varrho^2 / (\partial \varrho / \partial \psi)$ muß ebenfalls positiv sein, so daß die Zusatzbedingung ist

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \psi} \leq - \frac{\varrho^2}{\gamma^2 P} \quad (3.49)$$

Das ist die Schwarzschild-Bedingung für Stabilität gegen konvektive Moden (Lang, 1974; Schindler et al., 1983). Die Bedingung läßt sich mit Hilfe von (2.7) und der Gleichgewichtsbedingung (2.22) umformen zu

$$-R \frac{\partial T}{\partial \psi} \leq \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \quad (3.50)$$

Diese Bedingung ist für jedes γ erfüllt, wenn die Temperatur konstant ist oder mit wachsender Höhe zunimmt.

Als alternative Randbedingung wird wieder der Fall betrachtet, in dem δS_F und δS_Q unabhängig voneinander verschwinden. δS_F wird Null für die gleichen Randbedingungen (3.42) bzw. (3.46) wie im Fall ohne Gravitation. Der Oberflächenterm δS_Q wird Null, falls die Störung die Bedingung erfüllt

$$\underline{\xi} \cdot \nabla \psi = \frac{\gamma^* P}{\rho} \nabla \cdot \underline{\xi} = \gamma^* R T \nabla \cdot \underline{\xi} \quad (3.51)$$

Falls die Schwarzschildbedingung (3.49) erfüllt ist, ist δQ in diesem Fall ebenfalls positiv, so daß $\delta^2 F$ ein hinreichendes Stabilitätskriterium bildet.

Für den Fall ohne Gravitation wurde mit der Randbedingung (3.41) $\delta^2 F$ zu einem notwendigen und hinreichenden Stabilitätskriterium. Es soll diskutiert werden, unter welchen Bedingungen dies bei Anwesenheit von Schwerkraft für die entsprechende Randbedingung (3.51) erreicht werden kann, d.h. ob δQ zum Verschwinden gebracht werden kann. Dazu führen wir als neue Variable ein

$$\zeta = \underline{\xi} \cdot \nabla \psi - \frac{\gamma^* P}{\rho} \nabla \cdot \underline{\xi} \quad (3.52)$$

Nach Elimination des $\underline{\xi} \cdot \nabla \psi$ - Terms in (3.35) ergibt sich für δQ

$$\begin{aligned} \delta Q = \frac{1}{2} \int & \left[-\gamma^* P |\nabla \cdot \underline{\xi}|^2 - \frac{\partial g}{\partial \psi} |\zeta|^2 - 2\gamma^* \frac{P}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \psi} \operatorname{Re}(\zeta^* \nabla \cdot \underline{\xi}) \right. \\ & \left. - 2\gamma^* \zeta \nabla \cdot \underline{\xi}^* - \gamma^{*2} \frac{P^2}{\rho^2} \frac{\partial g}{\partial \psi} |\nabla \cdot \underline{\xi}|^2 \right] d^3 r \end{aligned} \quad (3.53)$$

Getrennte Minimierung von ζ gibt mit der Randbedingung $\zeta = 0$ (wegen 3.51)

$$\delta Q = \frac{\gamma^2}{2} \int \left[-1 - \gamma^2 \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \right] p |\nabla \cdot \underline{\xi}|^2 d^3 \quad (3.54)$$

Der Integrand ist Null, falls bei Gleichung (3.49) bzw. (3.50) das Gleichheitszeichen steht, so daß

$$-R \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \quad (3.55)$$

Diese Bedingung ist z.B. erfüllt bei konstanter Temperatur und bei isothermer Störung, d.h. $\gamma^2 = 1$. Unter dieser Bedingung erfüllt die minimierende Mode die Bedingung (3.51) im ganzen Lösungsgebiet. Die physikalische Bedeutung einer solchen Störung wird klar, wenn man (3.51) in die Kontinuitätsgleichung (2.1) einsetzt

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \rho = -\frac{\rho^2}{\gamma^2 p} \underline{v} \cdot \nabla \psi$$

Mit dem Adiabatengesetz (2.14) wird daraus

$$\frac{dp}{dt} = -\rho \underline{v} \cdot \nabla \psi \quad (3.56)$$

Es wird also im Gegensatz zum Fall ohne Gravitation Kompressionsarbeit geleistet, aber ausschließlich durch die Gravitationskraft. Auch in diesem Fall wird die instabilste Mode mit (3.51) nur dann realisiert, wenn die Randbedingungen eine Strömung durch den Rand zulassen.

Man erhält damit wieder $\delta^2 F$ als notwendiges und hinreichendes Stabilitätsfunktional (3.47). Aus den gleichen Gründen wie im Fall ohne Gravitation behandelt, gilt für die gestörten Felder α_1, β_1 die Bedingung, daß $\alpha_1 = 0$, wo $\nabla \alpha = 0$ ist, und analog $\beta_1 = 0$ bei $\nabla \beta = 0$.

3.2.2 Der Spezialfall zweidimensionaler Gleichgewichte

Die Ergebnisse zur Stabilitätstheorie dreidimensionaler Gleichgewichte werden in diesem Abschnitt spezialisiert zur Analyse zweidimensionaler Plasma-Gleichgewichte mit der Darstellung der Magnetfelder durch Eulerpotentiale (2.17). Für die Stabilitätsanalyse zweidimensionaler Gleichgewichte, dargestellt durch (2.18), wird auf Schindler et al. (1983) verwiesen.

Zunächst soll die Vorgehensweise kurz skizziert werden. Die Aufspaltung von δW aus Gleichung (3.33) wird übernommen, es ändern sich nur die Terme $\delta^2 F$ (3.34) und δS_F (3.36), während δQ (3.35) und δS_Q (3.37) unverändert bleiben. Die Diskussion der Randbedingungen, die aus dem Term δS_Q abgeleitet wurden, braucht hier deshalb nicht wiederholt zu werden; die Ergebnisse gelten praktisch unverändert. Der einzige Unterschied ist, daß im Gegensatz zu dreidimensionalen Gleichgewichten für die Störung in der invarianten z-Richtung sinnvollerweise periodische Randbedingungen angenommen werden. Die Beiträge der Oberflächenintegrale an der Begrenzung in z-Richtung heben sich damit auf und brauchen nicht mehr betrachtet zu werden.

Die Randbedingungen für α_1 und $\tilde{\beta}_1$ erhält man aus der Bedingung, daß δS_F (3.36) verschwindet. Im Unterschied zum dreidimensionalen Fall liegt der Normalenvektor für die Flächenintegrale immer in der x-y-Ebene. Man erhält als eine mögliche Randbedingung die Dirichlet-Randbedingung

$$\alpha_1 \Big|_{\partial \Omega} = \tilde{\beta}_1 \Big|_{\partial \Omega} = 0 \quad (3.57)$$

und Periodizität in z-Richtung. Andererseits ergeben sich die natürlichen Randbedingungen aus

$$\begin{aligned} (\nabla \tilde{\beta} + \underline{e}_z) \cdot [(\nabla \alpha_1 \times \nabla \tilde{\beta} + \nabla \alpha_1 \times \underline{e}_z + \nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}_1) \times \underline{n}] \\ + \nabla \tilde{\beta}_1 \cdot (\underline{B} \times \underline{n}) = 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \nabla \alpha \cdot [(\nabla \alpha_1 \times \nabla \tilde{\beta} + \nabla \alpha_1 \times \underline{e}_z + \nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}_1) \times \underline{n}] \\ + \nabla \alpha_1 \cdot (\underline{B} \times \underline{n}) = 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Unter Berücksichtigung der homogenen Neumann-Randbedingungen (3.16) für das Gleichgewicht ($\partial \alpha / \partial n = \partial \tilde{\beta} / \partial n = 0$) erhält man aus dem Term in der eckigen Klammer von (3.58), (3.59)

$$(\nabla \tilde{\beta} + \underline{e}_z) \cdot (\underline{n} \cdot \nabla \alpha_1) - \nabla \alpha \cdot (\underline{n} \cdot \nabla \tilde{\beta}_1) = 0$$

so daß als Randbedingung folgt

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \quad (3.60)$$

und $\alpha_1, \tilde{\beta}_1$ periodisch in z-Richtung.

Es ist zweckmäßig für die weitere Diskussion, $\delta^2 F$ (3.34) aufzuspalten in

$$\delta^2 F = \delta^2 F_p + \delta^2 F_z \quad (3.61)$$

wobei $\delta^2 F_z$ alle Terme mit z-Ableitungen erhält. Wir gehen mit dem Ansatz (2.17) in $\delta^2 F$ und erhalten

$$\begin{aligned} \delta^2 F = & \frac{1}{2\mu_0} \int \left[|\nabla \alpha_1 \times \nabla \tilde{\beta} + \nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}_1 + \nabla \alpha_1 \times \underline{e}_z|^2 \right. \\ & + 2 (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta} + \nabla \alpha \times \underline{e}_z) \cdot \operatorname{Re} (\nabla \alpha_1^* \times \nabla \tilde{\beta}_1) \\ & \left. - \mu_0 \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} |\alpha_1|^2 \right] d^3 r \end{aligned} \quad (3.62)$$

Mit der Definition $\nabla_2 := (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta^2 F_p = & \frac{1}{2\mu_0} \int \left[|\nabla_2 \alpha_1 \times \nabla \tilde{\beta} + \nabla \alpha \times \nabla_2 \tilde{\beta}_1|^2 + |\nabla_2 \alpha_1|^2 \right. \\ & + 2 (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) \cdot \operatorname{Re} (\nabla_2 \alpha_1^* \times \nabla_2 \tilde{\beta}_1) \\ & \left. - \mu_0 \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} |\alpha_1|^2 \right] d^3 r \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 F_z = & \frac{1}{2\mu_0} \int \left| \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial z} \nabla \alpha - \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \nabla \tilde{\beta} \right|^2 \\ & - 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \alpha_1^*}{\partial z} (\nabla_2 \alpha_1 \cdot \nabla \tilde{\beta} + \nabla_2 \tilde{\beta}_1 \cdot \nabla \alpha) \right) \\ & + 4 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \tilde{\beta}_1^*}{\partial z} \nabla_2 \alpha_1 \cdot \nabla \alpha \right) \Big] d^3 r \end{aligned} \quad (3.64)$$

Für bestimmte Anwendungen, z.B. für analytische Stabilitätsbetrachtungen, ist es vorteilhaft, $\delta^2 F_p$ und $\delta^2 F_z$ in dieser Form zu belassen. Im allgemeinen ist es jedoch zweckmäßig, einen Fourieransatz für die gestörten Potentiale in der Form

$$\alpha_1 = \alpha_{1k}(x, y) e^{ikz}, \quad \tilde{\beta}_1 = \beta_{1k}(x, y) e^{ikz} \quad (3.65)$$

anzunehmen. Die z -Integration in (3.63) und (3.64) läßt sich dann sofort ausführen, dies ist besonders vorteilhaft, wenn $\delta^2 F$ numerisch ausgewertet werden soll. $\delta^2 F_p$ und $\delta^2 F_z$ werden dann zu

$$\begin{aligned} \delta^2 F_{pk} = & \frac{1}{2\mu_0} \int \left[\left| \nabla_2 \alpha_{1k} \times \nabla \tilde{\beta} + \nabla \alpha \times \nabla_2 \beta_{1k} \right|^2 + \left| \nabla_2 \alpha_{1k} \right|^2 \right. \\ & + 2 (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) \cdot \operatorname{Re} (\nabla_2 \alpha_{1k}^* \times \nabla_2 \beta_{1k}) \\ & \left. - \mu_0 \frac{\partial^2 \rho}{\partial a^2} \left| \alpha_{1k} \right|^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 F_{zk} = & \frac{k}{\mu_0} \int \operatorname{Im} \left(\alpha_{1k} (\nabla_2 \alpha_{1k}^* \cdot \nabla \tilde{\beta} + \nabla \alpha \cdot \nabla_2 \beta_{1k}^*) \right. \\ & \left. + 2 \beta_{1k}^* \nabla \alpha \cdot \nabla_2 \alpha_{1k} \right) dx dy \\ & + \frac{k^2}{2\mu_0} \int \left| \beta_{1k} \nabla \alpha - \alpha_{1k} \nabla \tilde{\beta} \right|^2 dx dy \end{aligned} \quad (3.67)$$

$\delta^2 F_{pk}$ ist für reelle α_{1k} , β_{1k} identisch mit der zweiten Variation der Freien Energie $\delta^2 \tilde{F}$ (3.17) für zweidimensionale Gleichgewichte. Die Auswertung von $\delta^2 F_{pk}$ allein liefert damit ein Stabilitätskriterium für Stabilität gegenüber zweidimensionalen ($k = 0$) Störungen. Für eine dreidimensionale Stabilitätsanalyse ist die Auswertung von $\delta^2 F_{pk} + \delta^2 F_{zk}$ erforderlich, wobei das Minimum in k aufgesucht wird.

3.2.3 Instabilität von Schichtgleichgewichten bei Randbedingungen mit Teilchenaustausch

In diesem Abschnitt soll als Beispiel Instabilität für eine Klasse zweidimensionaler Gleichgewichte nachgewiesen werden, wobei Randbedingungen angenommen werden, die Teilchenaustausch ermöglichen, jedoch energetischen Abschluß gewährleisten. Dies sind $\nabla \cdot \underline{\xi} = 0$ (3.41) oder $\underline{\xi} \cdot \nabla \psi = (\rho P / \rho) \nabla \cdot \underline{\xi}$ (3.51) und die Randbedingungen für das Magnetfeld (3.57) bzw. (3.60). Das Stabilitätsfunktional $\delta^2 F$ wird dazu weiter spezialisiert für zweidimensionale Gleichgewichte, bei denen das Magnetfeld keine B_z -Komponente hat, d.h. $\tilde{\beta} = 0$ bei Ansatz (2.17). Man erhält damit aus (3.66) und (3.67)

$$\delta^2 F_{pk} = \frac{1}{2\mu_0} \int \left[|\nabla a \times \nabla_2 \beta_{1k}|^2 + |\nabla_2 a_{1k}|^2 - \mu_0 \frac{\partial^2 p}{\partial a^2} |a_{1k}|^2 \right] dx dy \quad (3.68)$$

$$\delta^2 F_{zk} = \frac{k}{\mu_0} \int |m (a_{1k} \nabla a \cdot \nabla_2 \beta_{1k}^* + \beta_{1k}^* \nabla a \cdot \nabla_2 a_{1k})| dx dy + \frac{k^2}{2\mu_0} \int |\beta_{1k}|^2 (\nabla a)^2 dx dy \quad (3.69)$$

Wir haben uns zum Ziel gesetzt, für bestimmte Gleichgewichte Instabilität nachzuweisen. Dazu genügt es, eine einzige Funktion zu finden, die $\delta^2 F$ negativ macht. Wir betrachten Funktionen a_{1k} , β_{1k} , die Null sind für $k \neq 0$, so daß $\delta^2 F_{zk} = 0$. Dann kann sowohl unter Dirichlet-Randbedingungen als auch unter Neumann-Randbedingungen für a_{1k} , β_{1k} das Funktional $\delta^2 F_{pk}$ separat nach β_{1k} minimiert werden. Es folgt

$$\delta^2 F_{pk} = \frac{1}{2\mu_0} \int [|\nabla_2 a_{1k}|^2 - \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial a^2} |a_{1k}|^2] dx dy \quad (3.70)$$

Dieses Funktional stimmt überein mit (2.32) für $B_z = 0$. Dort wurde gezeigt, daß $\delta^2 F_{pk}$ negativ ist für die F-instabilen Lösungen der Gleichgewichtslösungen (2.24). Als wichtiges Ergebnis folgt, daß bei Randbedingungen (3.41) bzw. (3.51), die freies Ausströmen zulassen, zweidimensionale F-instabile Gleichgewichte (mit $B_z = 0$), die keine Neutralpunkte enthalten, auch physikalisch instabil sind.

Wir betrachten hier nur ein Beispiel für Gleichgewichte dieses Types. Es handelt sich um das Modell von Kippenhahn und Schlüter (1958), bei der das Magnetfeld dargestellt wird durch

$$a = a_c \left(\ln \cosh \frac{x}{L} - \frac{y}{h} \right) \quad (3.71)$$

wobei a_c , L , h beliebige Konstanten sind. Aus der Gleichgewichtsbedingung (2.24) erhält man $\partial P / \partial a$ und damit

$$\mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial a^2} = \frac{2}{L^2} \exp \left(-\frac{2}{a_c} \left(a + \frac{y}{h} \right) \right) = \frac{2}{L^2 \cosh^2(x/L)} \quad (3.72)$$

Wenn das Lösungsfeld eine Halbebene in der x-y-Ebene ist, kann gezeigt werden, daß das Minimum von $\delta^2 F$ negativ ist. Dies wird nachgewiesen durch die Betrachtung des zu (2.24) zugehörigen Eigenwertproblems, das mit (3.72) ergibt

$$-\Delta a_{1k} - \frac{2}{L^2 \cosh^2(x/L)} a_{1k} = \gamma a_{1k} \quad (3.73)$$

mit der minimalen Mode

$$a_{1k} = \frac{\sin(k_y y)}{\cosh(x/L)} \quad (3.74)$$

und dem Eigenwert

$$\nu = (k_y L)^2 - 1 \quad (3.75)$$

welcher für genügend kleines k_y negativ ist. Dieses Ergebnis widerspricht nicht der Stabilitätsanalyse von Galindo und Schindler (1984), die für Gleichgewichte ähnlich wie beim Kippenhahn-Schlüter-Modell Stabilität fanden, da sie die Randbedingung $\underline{E} = 0$ benutzten. Es zeigt sich, daß diese Randbedingung, die einen völlig abgeschlossenen Rand simuliert, eine stabilisierende Wirkung hat.

3.3 Gleichgewichte mit stationärer Strömung

3.3.1 Dreidimensionale stationäre Gleichgewichte

In diesem Abschnitt werden die Grundgleichungen für dreidimensionale Plasma-Magnetfeld-Gleichgewichte mit stationärer Strömung abgeleitet. Diese werden allgemein beschrieben durch die Gleichungen der Magnetohydrodynamik (2.10), (2.11), (2.12) und die Maxwellgleichungen (2.5), (2.6) und (2.13). Zum Abschluß der Gleichungen muß noch eine Energiegleichung gewählt werden. Wir betrachten drei verschiedene Fälle. Zum einen nehmen wir an, daß die Strömung inkompressibel sei, was beschrieben wird durch

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (3.76)$$

Als zweite Möglichkeit betrachten wir eine funktionale Abhängigkeit des Druckes von der Dichte allein

$$p = p(\rho) \quad (3.77)$$

Eine derartige Abhängigkeit ist eine Verallgemeinerung des Adia-

batengesetzes. Als dritten Ansatz nehmen wir an, die Temperatur sei vorgegeben, wobei die Zustandsgleichung für ideale Gase (2.7) eingeht. Mit Hilfe des Ansatzes der Euler-Potentiale für das Magnetfeld (2.16) sollen die Gleichungen der MHD auf ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem für α und β analog zu (2.20), (2.21) reduziert werden, wobei frei wählbare Funktionen von α, β und ψ als Integrationsparameter eingehen. Diese Behandlung stationärer Gleichgewichte verallgemeinert die Theorie zweidimensionaler Gleichgewichte von Tsinganos (1981, 1983) auf den dreidimensionalen Fall.

Zunächst wird das Ohmsche Gesetz (2.12) für den stationären Fall und bei idealer Leitfähigkeit betrachtet. Gleichung (2.4) kombiniert mit (2.12) ergibt

$$\nabla \times (\underline{v} \times \underline{B}) = 0 \quad (3.78)$$

oder

$$\underline{v} \times \underline{B} = \nabla \phi \quad (3.79)$$

wobei ϕ das elektrische Potential ist. Mit dem Ansatz der Euler-Potentiale für $\underline{B}$ folgt

$$\phi = \phi(\alpha, \beta) \quad (3.80)$$

so daß ϕ eine Funktion von α und β allein ist. Aus Gleichung (3.79) folgt

$$\underline{B} \times \nabla \phi = \underline{B} \times (\underline{v} \times \underline{B}) = \underline{v} B^2 - \underline{B} (\underline{v} \cdot \underline{B}) \quad (3.81)$$

so daß für $\underline{v}$ der Ansatz gilt

$$\underline{v} = \alpha \underline{B} + \frac{1}{B^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \underline{B} \times \nabla \alpha + \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \underline{B} \times \nabla \beta \right) \quad (3.82)$$

χ ist hier noch eine beliebige Funktion, die durch Einsetzen in die MHD-Gleichungen näher spezifiziert wird. Für den allgemeinen Fall (3.82) ist es i.a. schwierig, die MHD-Gleichungen für dreidimensionale Gleichgewichte auf zwei Gleichungen für α und β zu reduzieren. Wir werden uns deshalb auf den Fall ohne elektrisches Feld beschränken ($\phi = 0$), in dem $\underline{v}$ und $\underline{B}$ parallel sind. χ wird mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung näher spezifiziert:

$$0 = \nabla \cdot (\xi \underline{v}) = \nabla \cdot (\chi \xi \underline{B}) = \underline{B} \cdot \nabla (\chi \xi) \quad (3.83)$$

Daraus folgt, daß $\chi \xi$ eine Funktion von α und β ist

$$\chi \xi := \sigma(\alpha, \beta) \quad (3.84)$$

so daß gilt

$$\underline{v} = \frac{\sigma}{\xi} \underline{B} \quad (3.85)$$

Wir kommen nun zur Behandlung der Bewegungsgleichung. (2.11) wird umgeformt zu

$$0 = -(\nabla \times \underline{v}) \times \underline{v} - \nabla \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\mu_0 \xi} (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B} - \frac{\nabla P}{\xi} - \nabla \psi \quad (3.86)$$

wobei die Vektoridentität

$$(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = (\nabla \times \underline{v}) \times \underline{v} + \nabla \frac{v^2}{2}$$

benutzt wurde. Mit (3.85) ergibt sich

$$\begin{aligned} (\nabla \times \underline{v}) \times \underline{v} &= \frac{\sigma}{\xi} (\nabla \times \underline{v}) \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) \\ &= \nabla \alpha \frac{\sigma}{\xi} \nabla \beta \cdot (\nabla \times \underline{v}) - \nabla \beta \frac{\sigma}{\xi} \nabla \alpha \cdot (\nabla \times \underline{v}) \\ &= \nabla \alpha \left(\left(\frac{\sigma}{\xi} \right)^2 \nabla \beta \cdot (\nabla \times \underline{B}) + \frac{\sigma}{\xi} \nabla \beta \cdot \nabla \frac{\sigma}{\xi} \times \underline{B} \right) \\ &\quad - \nabla \beta \left(\left(\frac{\sigma}{\xi} \right)^2 \nabla \alpha \cdot (\nabla \times \underline{B}) + \frac{\sigma}{\xi} \nabla \alpha \cdot \nabla \frac{\sigma}{\xi} \times \underline{B} \right) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Eingesetzt in (3.86) erhält man

$$\begin{aligned}
 0 = & \nabla \alpha \left(-\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^2 \nabla \beta \cdot \nabla \times \underline{B} - \frac{\epsilon}{\rho} \nabla \beta \cdot \nabla \frac{\epsilon}{\rho} \times \underline{B} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\mu_0 \rho} \nabla \beta \cdot \nabla \times \underline{B} \right) \\
 & + \nabla \beta \left(\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right)^2 \nabla \alpha \cdot \nabla \times \underline{B} + \frac{\epsilon}{\rho} \nabla \alpha \cdot \nabla \frac{\epsilon}{\rho} \times \underline{B} - \frac{1}{\mu_0 \rho} \nabla \alpha \cdot \nabla \times \underline{B} \right) \\
 & - \frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \psi \right)
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Aus dieser Beziehung folgt

$$\frac{\underline{B} \cdot \nabla P}{\rho} + \underline{B} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \psi \right) = 0 \tag{3.89}$$

Für die weitere Auswertung von (3.88) muß eine geeignete Energiegleichung gewählt werden. Diese Auswertung wird nun getrennt für die Gleichungen (3.76), (3.77) und für explizite Vorgabe der Temperatur durchgeführt.

a) Inkompressible Strömung, $\nabla \cdot \underline{v} = 0$

Bei inkompressibler Strömung kann ρ näher spezifiziert werden.

Aus den Bedingungen (3.76) und (3.85) folgt

$$0 = \nabla \cdot \underline{v} = \underline{B} \cdot \nabla \frac{\epsilon}{\rho} = - \frac{\epsilon}{\rho^2} \underline{B} \cdot \nabla \rho = 0 \tag{3.90}$$

so daß auch ρ eine Funktion von α und β allein ist

$$\rho = \rho(\alpha, \beta) \tag{3.91}$$

In diesem Fall wird (3.89) zu

$$\frac{1}{\rho} \underline{B} \cdot \nabla \left(P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho \psi \right) = 0$$

so daß folgt

$$\rho + \frac{\rho v^2}{2} + \rho \psi := \mathcal{H}(\alpha, \beta) \quad (3.92)$$

Aus (3.88) erhält man damit die beiden gekoppelten Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu_0 \rho} - \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^2 \right) \nabla \beta \cdot \nabla \times \underline{\beta} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sigma}{\rho} \right) \nabla \beta \cdot (\nabla \alpha \times \underline{\beta}) + \frac{\sigma^2}{2 \rho^3} \beta^2 \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \\ = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha} - \psi \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \right) \\ - \left(\frac{1}{\mu_0 \rho} - \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^2 \right) \nabla \alpha \cdot \nabla \times \underline{\beta} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\sigma}{\rho} \right) \nabla \alpha \cdot (\nabla \beta \times \underline{\beta}) + \frac{\sigma^2}{\rho^3} \beta^2 \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \\ = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta} - \psi \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \right) \end{aligned}$$

Diese werden umgeformt zu

$$\left(1 - M_A^2 \right) \nabla \beta \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) + \frac{1}{2} \frac{\partial M_A^2}{\partial \alpha} (\nabla \alpha \times \nabla \beta)^2 = \mu_0 \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha} - \psi \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \right) \quad (3.93)$$

$$- \left(1 - M_A^2 \right) \nabla \alpha \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) + \frac{1}{2} \frac{\partial M_A^2}{\partial \beta} (\nabla \alpha \times \nabla \beta)^2 = \mu_0 \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta} - \psi \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \right) \quad (3.94)$$

mit

$$M_A^2 = \frac{\mu_0 \sigma'^2}{\rho} \quad (3.95)$$

Mit (3.85) folgt

$$M_A^2 = \frac{\mu_0 \rho v^2}{B^2} = \frac{v^2}{V_A^2} \quad (3.96)$$

wobei V_A die lokale Alfvéngeschwindigkeit ist. M_A ist damit die lokale Alfvén-Machzahl. Das Verhältnis von lokaler Strömungsgeschwindigkeit zu lokaler Alfvéngeschwindigkeit ist so längs Feldlinien konstant. Das bedeutet auch, daß es keinen Übergang gibt, wo die Strömungsgeschwindigkeit die Alfvéngeschwindigkeit überschreitet. Das Gleichungssystem ist dann i.a. elliptisch, so daß ein Randwertproblem für α und β vorliegt.

Ein interessanter Spezialfall von (3.93), (3.94) ist der Fall konstanter Alfvén-Machzahl. Die Terme mit der Ableitung von M_A^2 verschwinden, und man erhält

$$\nabla \beta \cdot \nabla \chi (\nabla \alpha \times \nabla \beta) = \frac{\mu_0}{1 - M_A^2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial \alpha} - \psi \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha} \right) \quad (3.97)$$

$$-\nabla \alpha \cdot \nabla \chi (\nabla \alpha \times \nabla \beta) = \frac{\mu_0}{1 - M_A^2} \left(\frac{\partial \pi}{\partial \beta} - \psi \frac{\partial \varrho}{\partial \beta} \right) \quad (3.98)$$

Dieses Differentialgleichungssystem ist, abgesehen von der auf der rechten Seite auftretenden Konstanten, das gleiche wie (2.20), (2.21) für statische Gleichgewichte. Insbesondere können damit alle mathematischen Ergebnisse für dreidimensionale statische Gleichgewichte sofort auf diesen Spezialfall stationärer Gleichgewichte übertragen werden.

b) Kompressible Strömung, $P = P(\varrho)$

Weil der Druck P in dem Ansatz (3.77) nur eine Funktion von ϱ ist, läßt sich der Term $\nabla P / \varrho$ in Gleichung (3.89) umformen mit der Definition

$$\nabla r(\varrho) := \frac{\nabla P}{\varrho} \quad (3.99)$$

Daraus folgt aus (3.90)

$$\underline{B} \cdot \nabla \left(r(\varrho) + \frac{v^2}{2} + \psi \right) = 0$$

so daß

$$r(\varrho) + \frac{v^2}{2} + \psi := \pi_k(\alpha, \beta) \quad (3.100)$$

analog zu (3.92) für den inkompressiblen Fall. Aus (3.88) wird mit (3.100)

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{\mu_0 \varrho} - \left(\frac{\sigma}{\varrho} \right)^2 \right) \nabla \beta \cdot \nabla \times \underline{B} - \frac{\sigma}{\varrho^2} \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \nabla \beta \cdot (\nabla \alpha \times \underline{B}) \\
 & \quad + \frac{\sigma^2}{\varrho^3} \nabla \beta \cdot (\nabla \varrho \times \underline{B}) = \frac{\partial \pi_k}{\partial \alpha} \\
 & - \left(\frac{1}{\mu_0 \varrho} - \left(\frac{\sigma}{\varrho} \right)^2 \right) \nabla \alpha \cdot \nabla \times \underline{B} - \frac{\sigma}{\varrho^2} \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \nabla \alpha \cdot (\nabla \beta \times \underline{B}) \\
 & \quad - \frac{\sigma^2}{\varrho^3} \nabla \alpha \cdot (\nabla \varrho \times \underline{B}) = \frac{\partial \pi_k}{\partial \beta}
 \end{aligned}$$

woraus sich ergibt

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{\mu_0 \sigma^2}{\varrho} \right) \nabla \beta \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) + \frac{\mu_0}{2 \varrho} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \alpha} (\nabla \alpha \times \nabla \beta)^2 \\
 & \quad - \frac{\mu_0 \sigma^2}{\varrho^2} \nabla \varrho \cdot \nabla \beta \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) = \mu_0 \varrho \frac{\partial \pi_k}{\partial \alpha} \quad (3.101)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(1 - \frac{\mu_0 \sigma^2}{\varrho} \right) \nabla \alpha \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) + \frac{\mu_0}{2 \varrho} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \beta} (\nabla \alpha \times \nabla \beta)^2 \\
 & \quad + \frac{\mu_0 \sigma^2}{\varrho^2} \nabla \varrho \cdot \nabla \alpha \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta) = \mu_0 \varrho \frac{\partial \pi_k}{\partial \beta} \quad (3.102)
 \end{aligned}$$

Die Dichte ϱ kann hier nicht eliminiert werden, die algebraische Beziehung (3.100) schließt das gekoppelte Differentialgleichungssystem ab:

$$r(\varrho) + \frac{\sigma^2}{2 \varrho^2} (\nabla \alpha \times \nabla \beta)^2 + \psi - \pi_k(\alpha, \beta) = 0 \quad (3.103)$$

Die Gleichungen (3.101), (3.102) mit (3.103) sind nun nicht mehr in jedem Fall elliptisch, denn es ist nicht gewährleistet, daß die Strömung immer im Bereich unterhalb der Alfvén- oder Schallgeschwindigkeit bleibt. Die Lösungstheorie zu (3.101) und (3.102) ist deshalb grundsätzlich anders als im inkompressiblen Fall, weil sich der Typ der Gleichung beim Übergang in den Überschallbereich von elliptisch zu hyperbolisch wandelt. Außerdem wird die Formulierung von Randbedingungen problematisch. Wegen der mathematischen Schwierigkeit wurde hier auf eine weitere Behand-

lung verzichtet. Für eine Diskussion siehe z.B. Drazin und Reid (1982).

c) Kompressible Strömung bei Vorgabe der Temperatur

Mit der Definition

$$u := \frac{v^2}{2} + \psi \quad (3.104)$$

folgt aus (3.88), daß ∇P als Linearkombination von $\nabla \alpha, \nabla \beta$ und ∇u darstellbar ist. Damit folgt für P

$$P = P(\alpha, \beta, u) \quad (3.105)$$

Aus (3.88) erhält man damit

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\mu_0 \sigma^2}{\rho}\right) \nabla \beta \cdot \nabla \chi (\nabla \alpha \times \nabla \beta) + \frac{\mu_0}{2\rho} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \alpha} (\nabla \alpha \times \nabla \beta)^2 \\ - \frac{\mu_0 \sigma^2}{\rho^2} \nabla \rho \cdot \nabla \beta \chi (\nabla \alpha \times \nabla \beta) = \mu_0 \frac{\partial P}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} - \left(1 - \frac{\mu_0 \sigma^2}{\rho}\right) \nabla \alpha \cdot \nabla \chi (\nabla \alpha \times \nabla \beta) + \frac{\mu_0}{2\rho} \frac{\partial \sigma^2}{\partial \beta} (\nabla \alpha \times \nabla \beta)^2 \\ + \frac{\mu_0 \sigma^2}{\rho^2} \nabla \rho \cdot \nabla \alpha \chi (\nabla \alpha \times \nabla \beta) = \mu_0 \frac{\partial P}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$-\rho = \frac{\partial P}{\partial u} \quad (3.108)$$

Gleichung (3.108) wird mit Hilfe der Zustandsgleichung (2.7) näher diskutiert. Man erhält die Differentialgleichung für P

$$\frac{\partial P}{\partial u} = - \frac{P}{RT} \quad (3.109)$$

Aus (3.108) und (3.109) folgt, daß ρ und damit auch T nur von

α , β und U abhängen. Damit ergibt sich die Lösung von (3.109) zu

$$P = P_o(\alpha, \beta) \exp \left(- \int_{U_o}^U \frac{dU'}{RT(\alpha, \beta, U')} \right) \quad (3.110)$$

U_o ist eine beliebige Konstante und P_o eine frei wählbare Funktion. Ein wichtiger Spezialfall ist der Fall konstanter Temperatur längs Feldlinien, so daß T von U nicht abhängt. In diesem Fall wird der Druck zu

$$P = P_o(\alpha, \beta) \exp \left(- \frac{U - U_o}{RT} \right) \quad (3.111)$$

(3.106), (3.107) zusammen mit (3.108) oder (3.110) bilden das Gleichungssystem für stationäre Gleichgewichte bei vorgegebener Temperatur. Auch hier kann, wie schon beim Fall $P = P(\xi)$, nicht ausgeschlossen werden, daß Übergänge in den Überschall- bzw. Überalfvén-Bereich erfolgen. Der Charakter der Gleichung ist damit i.a. ebenfalls gemischt elliptisch-hyperbolisch.

3.3.2 Der zweidimensionale Sonderfall

Die Theorie der Gleichgewichte mit stationärer Strömung wird spezialisiert auf den Fall zweidimensionaler Strukturen, die in einer kartesischen Raumrichtung invariant sind. Dabei wird wie im vorhergehenden der Ansatz der Euler-Potentiale (2.17) benutzt. Es wird sich zeigen, daß im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall, der im vorigen Abschnitt behandelt wurde, zumindest bei inkompressibler Strömung ein elektrisches Feld mit einbezogen werden kann. Die Herleitung muß deshalb von den Grundgleichungen (2.10), (2.11) und den Ansatz für inkompressible Strömung (3.78) oder kompressible Strömung (3.77)

ausgehen. Die hier vorgestellte Theorie zweidimensionaler stationärer Gleichgewichte unterscheidet sich von der von Tsinganos (1981, 1983) durch den Ansatz der Euler-Potentiale für das Magnetfeld, der den Vorteil der realistischeren Behandlung der Randbedingungen bietet.

Die Kontinuitätsgleichung (2.10) wird gelöst durch den Ansatz für $\underline{v}$

$$\underline{v} = \frac{1}{\rho} \nabla \varphi(x, y) \times \underline{e}_z + u_z(x, y) \underline{e}_z \quad (3.112)$$

wie man durch Einsetzen verifizieren kann. Aus dem Ohmschen Gesetz (3.79) folgt mit diesem Ansatz

$$\begin{aligned} \underline{v} \times \underline{B} &= \frac{1}{\rho} \nabla \varphi \times \nabla \alpha - \frac{1}{\rho} \nabla \alpha (\nabla \varphi \times \nabla \tilde{\beta}) \cdot \underline{e}_z \\ &+ \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{\beta} (\nabla \varphi \times \nabla \alpha) \cdot \underline{e}_z + u_z \nabla \alpha = \nabla \phi \end{aligned} \quad (3.113)$$

$\nabla \phi$ hat keine z-Abhängigkeit, daher muß der $\nabla \varphi \times \nabla \alpha$ -Term verschwinden. Diese Eigenschaft ist erfüllt für alle φ mit

$$\varphi = \varphi(\alpha) \quad (3.114)$$

Aus (3.113) folgt mit (3.114), daß auch $\nabla \phi$ parallel zu $\nabla \alpha$ ist, man erhält

$$\phi = \phi(\alpha) \quad (3.115)$$

Aus (3.113) läßt sich nun u_z bestimmen:

$$u_z = \frac{d\phi}{d\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{d\alpha} (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) \cdot \underline{e}_z \quad (3.116)$$

Der Ansatz (3.112) wird damit zu

$$\underline{v} = \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{d\alpha} \underline{B} + \frac{d\phi}{d\alpha} \underline{e}_z \quad (3.117)$$

Mit dem Ansatz (3.117) gehen wir in die Bewegungsgleichung (3.86) ein, aus der sich ergibt

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\varphi'}{\varrho} \left(\frac{\varphi'}{\varrho} \nabla \times \underline{B} + \nabla \frac{\varphi'}{\varrho} \times \underline{B} \right) \times (\nabla \alpha \times \underline{e}_z + \nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) \\
 & - \phi' \left(\frac{\varphi'}{\varrho} \nabla \times \underline{B} + \nabla \frac{\varphi'}{\varrho} \times \underline{B} \right) \times \underline{e}_z \\
 & - \frac{\varphi' \phi''}{\varrho} (\nabla \alpha \times \underline{e}_z) \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) + \phi' \phi'' \nabla \alpha \\
 & + \frac{1}{\mu_0 \varrho} (\nabla \times \underline{B}) \times (\nabla \alpha \times \underline{e}_z + \nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) - \frac{\nabla P}{\varrho} - \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \psi \right) = 0 \quad (3.118)
 \end{aligned}$$

Die Striche bedeuten hierbei Ableitung nach α . Aus (3.118) folgt

$$\begin{aligned}
 & \nabla \alpha \left[\left(\frac{1}{\mu_0 \varrho} - \left(\frac{\varphi'}{\varrho} \right)^2 \right) (\nabla \tilde{\beta} + \underline{e}_z) \cdot \nabla \times \underline{B} - \frac{\varphi'}{\varrho} (\nabla \tilde{\beta} + \underline{e}_z) \cdot \left(\nabla \frac{\varphi'}{\varrho} \times \underline{B} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\varphi' \phi''}{\varrho} (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) \cdot \underline{e}_z + \phi' \phi'' \right] \\
 & + (\nabla \tilde{\beta} + \underline{e}_z) \cdot \left[\left(\frac{1}{\mu_0 \varrho} - \left(\frac{\varphi'}{\varrho} \right)^2 \right) \nabla \alpha \cdot \nabla \times \underline{B} + \frac{\varphi'}{\varrho} \nabla \alpha \cdot \nabla \frac{\varphi'}{\varrho} \times \underline{B} \right. \\
 & \quad \left. - \phi' \left(\frac{\varphi'}{\varrho} \nabla \times \underline{B} + \nabla \frac{\varphi'}{\varrho} \times \underline{B} \right) \times \underline{e}_z - \frac{\nabla P}{\varrho} \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \psi \right) \right] = 0 \quad (3.119)
 \end{aligned}$$

Die z-Komponente dieser Gleichung liefert nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{\mu_0 \varphi'^2}{\varrho} \right) \nabla \alpha \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) \\
 & - \frac{\mu_0 (\varphi')^2}{\varrho^2} \nabla \varrho \cdot \nabla \alpha \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) = 0 \quad (3.120)
 \end{aligned}$$

Aus (3.119) wird damit

$$\begin{aligned}
 & \nabla \alpha \left[\left(\frac{1}{\mu_0 \varrho} - \left(\frac{\varphi'}{\varrho} \right)^2 \right) (\nabla \tilde{\beta} \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) - \Delta \alpha) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\varphi'}{\varrho} \nabla \left(\frac{\varphi'}{\varrho} \right) \cdot (\nabla \alpha + \nabla \tilde{\beta} \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta})) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\varphi' \phi''}{g} (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) \cdot \underline{e}_z + \phi' \phi'' \Big] \\
 & + \frac{\varphi' \phi'}{g} \underline{e}_z \times (\nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta})) + \phi' \nabla \frac{\varphi'}{g} (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) \cdot \underline{e}_z \\
 & - \frac{\nabla P}{g} - \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \psi \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

Die weitere Elimination erfolgt ähnlich wie im vorigen Kapitel, (3.121) wird auf eine Differentialgleichung reduziert, mit frei wählbaren Funktionen, die von α allein abhängen, als Integrale von (3.121). Wir werden zwei Fälle betrachten, den inkompressiblen Fall und den kompressiblen Fall, wobei $P = P(g)$ (3.77) vorgegeben wird. Bei kompressibler Strömung läßt sich die Reduktion nur für verschwindendes elektrisches Feld durchführen, bei inkompressibler Strömung ist diese zusätzliche Annahme nicht nötig.

a) Inkompressible Strömung, $\nabla \cdot \underline{v} = 0$

Aus (3.117) und (3.76) erhält man

$$\begin{aligned}
 0 = \nabla \cdot \underline{v} &= - \frac{\varphi'}{g^2} \underline{B} \cdot \nabla g = - \frac{\varphi'}{g^2} (\nabla \alpha \times \underline{e}_z) \cdot \nabla g \\
 &= \frac{\varphi'}{g^2} \underline{e}_z \cdot (\nabla \alpha \times \nabla g)
 \end{aligned} \tag{3.122}$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß ∇g keine z-Komponente hat, es folgt

$$g = g(\alpha) \tag{3.123}$$

Damit läßt sich (3.120) vereinfachen. Weil $\nabla(\varphi'/g)$ nun parallel zu $\nabla \alpha$ ist, verschwindet der zweite Term in (3.120) und man erhält

$$\nabla \alpha \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) = 0 \tag{3.124}$$

was mit (3.11) für statische Gleichgewichte übereinstimmt. Bildet

man das Kreuzprodukt von $\nabla \alpha$ mit (3.121), so erhält man

$$\frac{\varphi' \phi'}{\mathcal{S}} \nabla \alpha \times (\underline{e}_z \times \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta})) - \frac{1}{\mathcal{S}} \nabla \alpha \times \nabla \left(P + \frac{\mathcal{S} v^2}{2} + \mathcal{S} \psi \right) = 0 \quad (3.125)$$

Der erste Term ist Null wegen (3.124), so daß folgt

$$P + \frac{\mathcal{S} v^2}{2} + \mathcal{S} \psi = \mathcal{N}(\alpha) \quad (3.126)$$

Die Vektorgleichung (3.121) hat beim inkompressiblen Fall nur eine Komponente in $\nabla \alpha$ -Richtung, diese Komponente ist

$$\begin{aligned} & (1 - M_A^2) \left(\nabla \tilde{\beta} \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) - \Delta \alpha \right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{dM_A^2}{d\alpha} \left((\nabla \alpha)^2 + (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta})^2 \right) + \mu_0 \varphi' \phi' \frac{\nabla \alpha \times \underline{e}_z \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta})}{(\nabla \alpha)^2} \\ & + \mu_0 \frac{d}{d\alpha} (\varphi' \phi') (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) \cdot \underline{e}_z + \mu_0 \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\mathcal{S} \phi'^2}{2} \right) = \mu_0 \left(\frac{d\mathcal{N}}{d\alpha} - \psi \frac{d\mathcal{S}}{d\alpha} \right) \end{aligned} \quad (3.127)$$

wobei

$$M_A^2 := \frac{\mu_0 (\varphi')^2}{\mathcal{S}} \quad (3.128)$$

Für $\phi' = 0$ stimmt (3.128) mit (3.95) überein, so daß dann M_A die lokale Alfvén-Machzahl ist. Gleichung (3.124) und (3.127) bilden das zu lösende partielle Differentialgleichungssystem für zwei-dimensionale Gleichgewichte mit stationärer Strömung.

b) Kompressible Strömung, $P = P(\mathcal{S})$

Die Reduktion von (3.121) wird nur für den Fall ohne elektrisches Feld durchgeführt, d.h. $\phi' = 0$. Wir benutzen die Definition (3.99) für $r(\mathcal{S})$, so daß Gleichung (3.121) übergeht in

$$\begin{aligned} \nabla \alpha \left[\left(\frac{1}{\mu_0 \varrho} - \left(\frac{\varphi'}{\varrho} \right)^2 \right) (\nabla \tilde{\beta} \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) - \Delta \alpha) \right. \\ \left. + \left(\frac{\varphi' \varphi''}{\varrho^2} \nabla \alpha - \frac{\varphi'^2}{\varrho^3} \nabla \varrho \right) \cdot (\nabla \alpha + \nabla \tilde{\beta} \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta})) \right] \\ - \nabla \left(r + \frac{v^2}{2} + \psi \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.129)$$

Damit folgt

$$r + \frac{v^2}{2} + \psi := \pi_k(\alpha) \quad (3.130)$$

Aus (3.129) erhält man

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\mu_0 \varphi'^2}{\varrho} \right) (\nabla \tilde{\beta} \cdot \nabla \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) - \Delta \alpha) \\ + \frac{\mu_0 \varphi' \varphi''}{\varrho} ((\nabla \alpha)^2 + (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta})^2) \\ - \frac{\mu_0 \varphi'^2}{\varrho^2} \nabla \varrho \cdot (\nabla \alpha + \nabla \tilde{\beta} \times (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta})) = \mu_0 \varrho \frac{d\pi_k}{d\alpha} \end{aligned} \quad (3.131)$$

(3.131) bildet zusammen mit (3.120) und (3.130) das zu lösende Gleichungssystem für zweidimensionale Gleichgewichte mit kompressibler Strömung.

3.4 Das numerische Verfahren

In diesem Abschnitt wird das numerische Lösungsverfahren für die nichtlinearen Gleichungssysteme für statische Gleichgewichte (2.20), (2.21) und für stationäre Gleichgewichte im inkompressiblen Fall (3.93), (3.94) skizziert. Außerdem wird gezeigt, wie das numerische Verfahren für statische Gleichgewichte gleichzeitig ein Stabilitätskriterium für Störungen in der idealen MHD liefert. Ein numerisches Verfahren zur Lösung der Grad-Shafranov

nov-Gleichung (2.24), das teilweise in Kapitel 4 angewandt wird, wurde schon früher detailliert beschrieben (Zwingmann, 1980).

Zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme werden i.a. Iterationsverfahren angewandt. Einfache Iterationsverfahren sind jedoch häufig prinzipiell nicht in der Lage, alle Lösungen zu berechnen (z.B. Barnes und Sturrock, 1972; Sakurai, 1979). Deshalb muß ein Algorithmus gewählt werden, der allgemein anwendbar ist und gegen alle Lösungen konvergiert. Zur weiteren Betrachtung werden die Gleichungssysteme abgekürzt als

$$G^{(\alpha)}(\alpha, \beta, \lambda) = 0 \quad (3.132a)$$

$$G^{(\beta)}(\alpha, \beta, \lambda) = 0 \quad (3.132b)$$

$$\alpha|_{\partial\Omega} = \alpha_r(r, \lambda), \quad \beta|_{\partial\Omega} = \beta_r(r, \lambda) \quad (3.132c)$$

wobei $G^{(\alpha)}$ und $G^{(\beta)}$ die auf α und β wirkenden Operatoren bezeichnen und $\partial\Omega$ den Teil des Randes, auf dem Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben sind, während auf dem übrigen Rand homogene Neumann-Randbedingungen gelten. Ein allgemein anwendbares Verfahren ist der Newton-Algorithmus. Meyer-Spasche (1975) zeigte, daß das Newton-Verfahren bis auf singuläre Fälle immer konvergiert, wenn die Startfunktion für die Iteration nahe genug bei der exakten Lösung liegt. Die Schwierigkeit, gute Startfunktionen zu finden, wird durch das Verfahren von Keller (1977) gelöst. Das Keller-Verfahren wurde zur Produktion der in dieser Arbeit vorgestellten numerischen Ergebnisse benutzt, es ist in der Lage, ganze Lösungskurven zu berechnen, wie sie in Abb. 1.3 skizziert sind.

Zunächst soll das Prinzip des Verfahrens erläutert werden. Wenn eine Lösung (α_I, β_I) von (3.132) zu einem λ_I bekannt ist, wird sie als Startfunktion für die Berechnung zu einem $\lambda_I + \delta\lambda$ benutzt. $\delta\lambda$ wird hierbei nicht explizit vorgegeben, sondern in geeigneter Weise durch das Verfahren selbst bestimmt. Dies wird durch Abb. 3.1 illustriert und im folgenden näher erläutert.

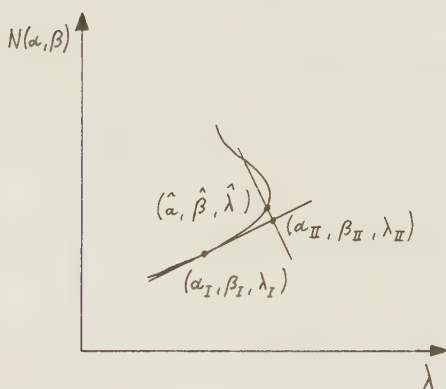


Abb. 3.1: Jeder Punkt auf der Kurve stellt eine Lösung $(\alpha(\underline{r}), \beta(\underline{r}))$ dar. Die Abszisse enthält eine typische Norm.

Bei vorgegebener Lösung $(\alpha_I, \beta_I, \lambda_I)$ wird die nächste auf der Lösungskurve approximiert durch

$$\alpha_{II}(\underline{r}) = \alpha_I(\underline{r}) + s \cdot \dot{\alpha}_I(\underline{r}) \quad (3.133a)$$

$$\beta_{II}(\underline{r}) = \beta_I(\underline{r}) + s \cdot \dot{\beta}_I(\underline{r}) \quad (3.133b)$$

$$\lambda_{II} = \lambda_I + s \cdot \dot{\lambda}_I \quad (3.133c)$$

der Gleichung für die Tangente an die Kurve in Punkt I. Die Terme $\dot{\alpha}_I$, $\dot{\beta}_I$ und $\dot{\lambda}_I$ kann man formal als Ableitungen nach der Bogenlänge

auf der Kurve betrachten. Diese Ableitungen werden bestimmt durch Lösen von

$$DG(\alpha_I, \beta_I, \lambda_I) \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_I(r) \\ \dot{\beta}_I(r) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial G^{(\alpha)}}{\partial \lambda}(\alpha_I, \beta_I, \lambda_I) \\ \frac{\partial G^{(\beta)}}{\partial \lambda}(\alpha_I, \beta_I, \lambda_I) \end{pmatrix} \dot{\lambda}_I = 0 \quad (3.134)$$

$$\dot{\alpha}_I \Big|_{\partial \Omega} = - \frac{\partial \alpha_r}{\partial \lambda} \dot{\lambda}_I, \quad \dot{\beta}_I \Big|_{\partial \Omega} = - \frac{\partial \beta_r}{\partial \lambda} \dot{\lambda}_I \quad (3.135)$$

$$\int (\dot{\alpha}_0(r) \dot{\alpha}_I(r) + \dot{\beta}_0(r) \dot{\beta}_I(r)) d^3r + \dot{\lambda}_0 \dot{\lambda}_I = 1 \quad (3.136)$$

wobei DG die Funktionalmatrix

$$DG := \begin{pmatrix} G_\alpha^{(\alpha)} & G_\beta^{(\alpha)} \\ G_\alpha^{(\beta)} & G_\beta^{(\beta)} \end{pmatrix} \quad (3.137)$$

ist. G_α bzw. G_β bezeichnen die Frechét-Ableitung nach α bzw. β . Gleichung (3.136) ist nötig, um die Lösung eindeutig zu machen, die Werte $\dot{\alpha}_0$, $\dot{\beta}_0$ und $\dot{\lambda}_0$ legen die Richtung der Tangentefest. Die Werte mit dem Index 0 können dem vorhergehenden Lösungsschritt entnommen werden. Die Ableitungen $\dot{\alpha}_I$, $\dot{\beta}_I$ und $\dot{\lambda}_I$ werden danach normiert, so daß

$$\int (\dot{\alpha}_I^2(r) + \dot{\beta}_I^2(r)) d^3r + \dot{\lambda}_I^2 = 1 \quad (3.138)$$

Um die nächste Lösung auf der Kurve zu bestimmen, muß (3.132) simultan gelöst werden mit

$$\int [\dot{\alpha}_I(\alpha - \alpha_{II}) + \dot{\beta}_I(\beta - \beta_{II})] d^3r + \dot{\lambda}_I(\lambda - \lambda_{II}) = 0 \quad (3.139)$$

der Bedingung, daß $\alpha(r)$ und $\beta(r)$ auf der Normalebene senkrecht zur Tangente in $(\alpha_I, \beta_I, \lambda_I)$ liegen. Zur Lösung von (3.132) und (3.139) wird das Newton-Verfahren mit $(\alpha_{II}, \beta_{II}, \lambda_{II})$ als Startwerten angewandt:

$$a^{k+1}(\underline{r}) = a^k(\underline{r}) + \delta a(\underline{r}) \quad (3.140a)$$

$$\beta^{k+1}(\underline{r}) = \beta^k(\underline{r}) + \delta \beta(\underline{r}) \quad (3.140b)$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \delta \lambda \quad (3.140c)$$

mit

$$DG(a^k, \beta^k, \lambda^k) \begin{pmatrix} \delta a(\underline{r}) \\ \delta \beta(\underline{r}) \end{pmatrix} + \delta \lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial G^{(a)}}{\partial \lambda}(a^k, \beta^k, \lambda^k) \\ \frac{\partial G^{(\beta)}}{\partial \lambda}(a^k, \beta^k, \lambda^k) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} G^{(a)}(a^k, \beta^k, \lambda^k) \\ G^{(\beta)}(a^k, \beta^k, \lambda^k) \end{pmatrix} \quad (3.141)$$

$$\delta a \Big|_{\partial \Omega} = -a^k + a_r, \quad \delta \beta \Big|_{\partial \Omega} = -\beta^k + \beta_r \quad (3.142)$$

$$\begin{aligned} \int (\dot{a}_I \delta a + \dot{\beta}_I \delta \beta) d^3r + \dot{\lambda}_I \delta \lambda = \\ - \int [\dot{a}_I (a^k - a_I) + \dot{\beta}_I (\beta^k - \beta_I)] d^3r - \dot{\lambda}_I (\lambda^k - \lambda_I) + S \end{aligned} \quad (3.143)$$

Wenn s genügend klein gewählt wurde, konvergiert das Verfahren gegen die Lösung $(\hat{a}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})$ von (3.132). Zur weiteren Berechnung ersetzen die neuen Lösungen jeweils $(a_I, \beta_I, \lambda_I)$ in (3.132) bis (3.143), und das Verfahren wird wiederholt. Keller (1977) zeigte, daß die Gleichungssysteme außer an Bifurkationspunkten, wo sich Lösungsäste schneiden, immer lösbar sind.

Weitere Details des Lösungsverfahrens sind im Anhang B beschrieben. An dieser Stelle wird die explizite Form der Funktionalmatrix DG für statische Gleichgewichte angegeben und gezeigt, wie das numerische Verfahren ein Stabilitätskriterium liefert.

Bei statischen Gleichgewichten sind die Komponenten der Funktionalmatrix DG gegeben durch

$$G_{\alpha}^{(\alpha)}(\alpha, \beta, \lambda) = -\nabla\beta \cdot \nabla\chi(\nabla\beta \times \nabla) - \mu_0 \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} \quad (3.144a)$$

$$G_{\beta}^{(\alpha)}(\alpha, \beta, \lambda) = \nabla\chi(\nabla\alpha \times \nabla\beta) \cdot \nabla + \nabla\beta \cdot \nabla\chi(\nabla\alpha \times \nabla) - \mu_0 \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta} \quad (3.144b)$$

$$G_{\alpha}^{(\beta)}(\alpha, \beta, \lambda) = -\nabla\chi(\nabla\alpha \times \nabla\beta) \cdot \nabla - \nabla\alpha \cdot \nabla\chi(\nabla\beta \times \nabla) - \mu_0 \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta} \quad (3.144c)$$

$$G_{\beta}^{(\beta)}(\alpha, \beta, \lambda) = -\nabla\alpha \cdot \nabla\chi(\nabla\alpha \times \nabla) - \mu_0 \frac{\partial^2 p}{\partial \beta^2} \quad (3.144d)$$

Im Anhang B wird gezeigt, wie man leicht numerisch testen kann, ob die Operator-Matrix DG positiv definit ist oder nicht. Die Positiv-Definitheit von DG ist äquivalent damit, daß ihre quadratische Form positiv ist. Diese ist gegeben durch

$$Q[\alpha_1, \beta_1] := \int [\alpha_1^* G_{\alpha}^{(\alpha)} \alpha_1 + \alpha_1^* G_{\beta}^{(\alpha)} \beta_1 + \beta_1^* G_{\alpha}^{(\beta)} \alpha_1 + \beta_1^* G_{\beta}^{(\beta)} \beta_1] d^3r \quad (3.145)$$

Nach Einsetzen der Komponenten von DG (3.144) und partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} Q[\alpha_1, \beta_1] = & \int [|\nabla\alpha_1 \times \nabla\beta + \nabla\alpha \times \nabla\beta_1|^2 + 2(\nabla\alpha \times \nabla\beta) \cdot \text{Re}(\nabla\alpha_1^* \times \nabla\beta_1) \\ & - \mu_0 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} |\alpha_1|^2 + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta} \text{Re}(\alpha_1^* \beta_1) + \frac{\partial^2 p}{\partial \beta^2} |\beta_1|^2 \right)] d^3r \\ & + \oint_{\partial V} \underline{n} \cdot [(\nabla\alpha_1 \times \nabla\beta + \nabla\alpha \times \nabla\beta_1) \times (\alpha_1^* \nabla\beta - \beta_1^* \nabla\alpha) \\ & + (\nabla\alpha \times \nabla\beta) \times (\alpha_1^* \nabla\beta_1 - \beta_1^* \nabla\alpha_1)] dS \quad (3.146) \end{aligned}$$

Wenn die Randbedingungen (3.42) oder (3.46) zusammen mit (3.7) für α_1 und β_1 gelten, so daß der Oberflächenterm verschwindet, findet man die Beziehung

$$Q[\alpha_1, \beta_1] = 2\mu_0 \delta^2 F[\alpha_1, \beta_1] \quad (3.147)$$

wobei $\delta^2 F$ durch (3.34) definiert ist. Weil die Funktionalmatrix DG während des Iterationsverfahrens in jedem Fall berechnet werden muß und ihre Positiv-Definitheit leicht überprüft werden kann, liefert das Verfahren auf einfache Weise eine Stabilitätsanalyse für Moden in der idealen MHD. Hierbei werden Randbedingungen angenommen, die Strömung durch den Rand erlauben, also (3.41) bzw. (3.51). Die Komponenten von DG für den Spezialfall zweidimensionaler Gleichgewichte, die durch (3.10), (3.11) bestimmt sind, sollen hier nicht angegeben werden. In analoger Weise zu der oben angegebenen Argumentation folgt, daß die quadratische Form von DG im zweidimensionalen Fall durch (3.46) gegeben ist, d.h. man erhält eine Stabilitätsanalyse für zweidimensionale ($\partial/\partial z = 0$) Moden in der idealen MHD.

4. Anwendung auf eruptive Prozesse in der Sonnenatmosphäre

4.1 Einfluß der Entstehung neuen magnetischen Flusses an der Photosphäre

In diesem Abschnitt wird das in der Einleitung beschriebene Newly-Emerging-Flux-Modell quantitativ analysiert. Es soll mit Hilfe eines quasistatischen MHD-Gleichgewichtsmodells untersucht werden, ob bei geeigneter Variation der photosphärischen Randbedingungen Einsatzzunkte existieren, an denen dynamische Prozesse eingeleitet werden. Im Gegensatz zu dem Modell von Heyvaerts et al. (1977), die eine thermische Instabilität annahmen, soll hier untersucht werden, ob eine magnetohydrodynamische Instabilität einsetzen kann, wenn neuer magnetischer Fluß von unterhalb der Photosphäre aufsteigt. Unsere Behandlung wird sich auf Two-Ribbon-Flares beschränken. Die für Two-Ribbon-Flares typische Struktur vor Einsatz der Eruption ist eine langgestreckte magnetische Arkade. Wir betrachten die Wechselwirkung dieses Feldes mit einer Arkadenstruktur, die sich neu von unterhalb der Photosphäre bildet. In diesem Fall vereinfacht sich die theoretische Beschreibung, da wir ein zweidimensionales Gleichgewichtsmodell annehmen können (Birn und Schindler, 1981). Außerdem werden wir die Behandlung mit der Grad-Shafranov-Gleichung (2.24) durchführen, wobei wir uns auf nicht verscherte Magnetfelder beschränken, weil die Berücksichtigung von magnetischer Verscherung als Randbedingung (2.24) problematisch ist (siehe Kapitel 2.2, 4.2). Wir behandeln Strukturen, deren Größe klein ist gegen die Skalenhöhe der Gravitation, die mit der für die Korona typischen Temperatur $2 \cdot 10^6 \text{ K}$ 10^5 km beträgt.

Die photosphärischen Randbedingungen für die Plasma-Magnetfeldstruktur werden für das Potential α angesetzt als

$$\alpha = A_{alt} + \lambda \cdot A_{neu} \quad (4.1)$$

A_{alt} beschreibt die Randbedingung für den alten Magnetfluß, der als bipolare Arkadenstruktur angenommen wird. A_{neu} ist die Randbedingung für den neuen Fluß, wobei λ dessen Stärke festlegt. Das quasistatische Anwachsen des neuen Flusses wird durch einen ansteigenden Wert von λ beschrieben.

Es soll zunächst die Frage geklärt werden, ob es eine obere Grenze für die Stärke des neuen magnetischen Flusses gibt, d.h. ob es im Rahmen der Gleichgewichtstheorie einen kritischen Wert für λ gibt. Dazu substituieren wir in Gleichung (2.24)

$$A = \alpha - \lambda A_{neu} \quad (4.2)$$

so daß sich ergibt

$$-\Delta A = J(A + \lambda A_{neu}) \quad (4.3)$$

mit

$$J(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \left(\nu_\infty P(\alpha) + \frac{B_z^2(\alpha)}{2} \right)$$

Wir wenden die mathematische Theorie für die Grad-Shafranov-Gleichung an, um zu prüfen, ob es eine Obergrenze für λ gibt. Aus (2.27) ergeben sich die Bedingungen für J und A_{neu} :

$$\frac{dJ}{d\alpha} > 0, \quad J \frac{d^2 J}{d\alpha^2} > 0, \quad A_{neu} < 0 \quad (4.4)$$

Dann erhält man folgende Aussagen (siehe Kapitel 2.3)

- 1) Es existiert ein λ^* , so daß für $\lambda > \lambda^*$ keine Gleichgewichtslösungen existieren.
- 2) Für $\lambda < \lambda^*$ gibt es eine Klasse von Lösungen, die zweidimensional stabil sind.

Die Anwendung der mathematischen Theorie von Heyvaerts et al. (1982) ist hier nicht möglich, weil J nicht die spezielle Form (2.28) hat. Damit ist eine Klasse von Randbedingungen gefunden, bei denen es eine kritische Feldstärke des neuen Flusses gibt: Für die Stromfunktion J und A_{neu} sollen die Bedingungen (4.4) gelten.

Für explizite Anwendungen wurden numerische Rechnungen mit dem in Kapitel 3.4 beschriebenen numerischen Verfahren durchgeführt. Dabei wurde insbesondere die Stärke des neuen Magnetflusses für verschiedene Abstände zwischen altem und neuem Fluß ermittelt und die Struktur der Magnetfeldkonfiguration diskutiert. Zunächst werden die Funktion J und die Randbedingungen für A_{alt} und A_{neu} genauer spezifiziert. Für J wird angenommen

$$J(\alpha) = -\lambda_p \frac{A_c}{L^2} e^{-2\alpha/A_c} \quad (4.5)$$

wobei A_c, λ_p, L geeignet gewählte Konstanten sind. Interpretiert man J als $\partial P / \partial \alpha$, so entspricht diese Funktion dem lokalen thermodynamischen Gleichgewicht (z.B. Schindler, 1972). Für den alten Fluß wird als Randbedingung angesetzt

$$A_{\text{alt}}(x, y=0) = A_c \left(\ln \frac{x^2 + y_0^2}{2L^2} - c_d \frac{L y_0}{x^2 + y_0^2} \right) \quad (4.6)$$

wobei y_0 und c_d konstant sind. Diese Funktion entspricht dem Feld eines Linienstroms und einem überlagerten Liniendipol der relativen Stärke c_d , das unterhalb der Photosphäre bei $x = x_0$ und

$y = -y_0$ liegt. Ein Linienstromanteil ist deshalb nötig, weil nur so ein Vakuumfeld für große Abstände mit der gewählten Funktion $J(\alpha)$ (4.5) erzielt werden kann. Es ist aus der Ausgangsproblemstellung klar, daß nur Strukturen betrachtet werden sollen, die räumlich begrenzt sind.

Für den neuen Fluß wird angesetzt

$$A_{neu}(x, y=0) = -A_c \frac{L y_1}{y_1^2 + (x-d)^2} \quad (4.7)$$

Dieses Feld entspricht der Randbedingung für einen Liniendipol, der bei $x = d$ und $y = -y_1$ unterhalb der Photosphäre liegt.

Die oben angegebenen Randbedingungen wurden auf einer rechteckigen Begrenzung mit $-20 L \leq x \leq 20 L$, $0 \leq y \leq 30 L$ als Dirichlet-Randbedingungen vorgeschrieben. Die seitliche und obere Begrenzung läßt sich so begründen, daß das Feld dort fast stromfrei ist und daß eine Berandung die Ergebnisse kaum beeinflusst. Die Auflösung betrug 19×23 Stützstellen, wobei in der Umgebung von $x = 0$ und $x = d$ feiner aufgelöst wurde. Zur Kontrolle wurden einige Rechnungen mit veränderter Zahl der Stützstellen durchgeführt, wobei sich Abweichungen von wenigen Prozent ergaben.

In dem Modell sind verschiedene Parameter enthalten, einer der wichtigsten ist der Abstand d zwischen altem und neuem Fluß, denn es ist von vornherein klar, daß man für große Abstände nur eine Überlagerung von Vakuumfeldern im Zwischenbereich zwischen beiden Feldern erhält, während man für kleiner werdende Abstände eine zunehmende Wechselwirkung erwartet. Die numerischen Ergebnisse

sind zusammengestellt in Abb. 4.1, in der die magnetische Energie der Gleichgewichte über λ aufgetragen ist. $\lambda = 0$ bedeutet, daß kein neuer Fluß vorhanden ist. Diese Ausgangskonfiguration zeigt Abb. 4.2. Hier wird deutlich, warum der Liniendipolanteil bei (4.6) gewählt wurde: Der Liniendipol bewirkt, daß die Feldlinien der Struktur stärker nach außen geneigt sind, dies soll die Wechselwirkung mit dem neuen Fluß erleichtern. Eine ähnliche Feldstruktur wird auch in dem qualitativen Modell von Heyvaerts et al (1977) vorgeschlagen. Die Stromverteilung (4.5) in Verbindung mit (4.6) bedeutet, daß der Strom im Innern der Struktur maximal wird und nach außen hin abnimmt, d.h. dort zu einem Vakuumfeld wird. Bei der Interpretation von J als $\partial P / \partial a$ ist damit der Druck maximal im Innern. Die zeitliche Entwicklung verläuft so, daß das neue Feld im Abstand d vom Zentrum der alten Struktur herauswächst. Es wurden drei Gleichgewichtsfolgen mit jeweils unterschiedlichem Wert für den Abstand d berechnet. Man erkennt aus dem Diagramm (4.1) die aus der Theorie erwartete Eigenschaft, daß Einsatzzpunkte in allen drei Fällen existieren. Die Magnetfeldkonfiguration für $d = 7 L$ am Einsatzzpunkt mit $\lambda^* = 6,1$ zeigt Bild 4.3. Die neue Feldstruktur hat jetzt eine vergleichbare Feldstärke wie der schon vorhandene Fluß, wie man schon dem Feldlinienbild selbst entnehmen kann. Eine Gleichgewichtsfolge mit $d = 5 L$ zeigt einen Einsatzzpunkt bei $\lambda^* = 4$. Die zugehörige Feldstruktur ist in 4.4 dargestellt. Der neue Fluß am Einsatzzpunkt ist jetzt schon deutlich kleiner im Vergleich zu $d = 7 L$ geworden. Für den Abstand $d = 3 L$ liegt der Einsatzzpunkt bei $\lambda^* = 1,7$. Abb. 4.5 zeigt, daß man jetzt nur einen relativ kleinen neuen Fluß benötigt. Die Abhängigkeit der kritischen Feldstärke vom Abstand wurde in Diagramm 4.6 aufgetragen. Man erhält eine fast lineare Abhängigkeit von λ^* mit d .

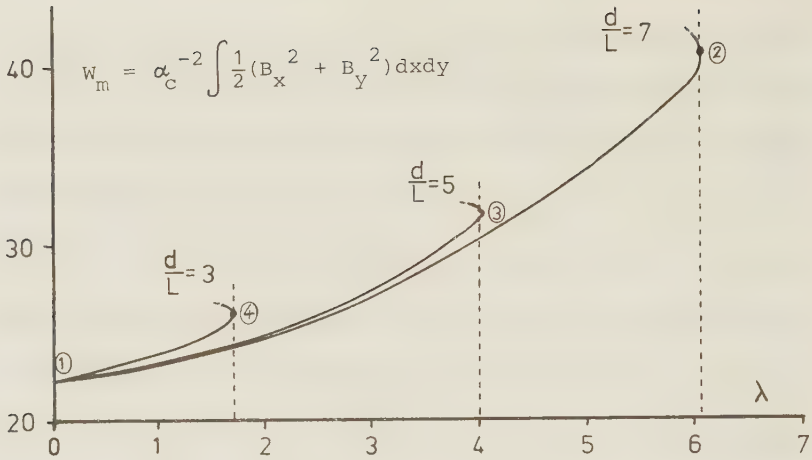


Abb. 4.1: Gleichgewichtsdiagramm, Parameterwerte: $\lambda_p = 0,5$, $y_0 = y_1 = L$, $c_d = 1$. Die Lösungen 1 bis 4 sind in Abb. 4.2 bis 4.5 gezeigt.

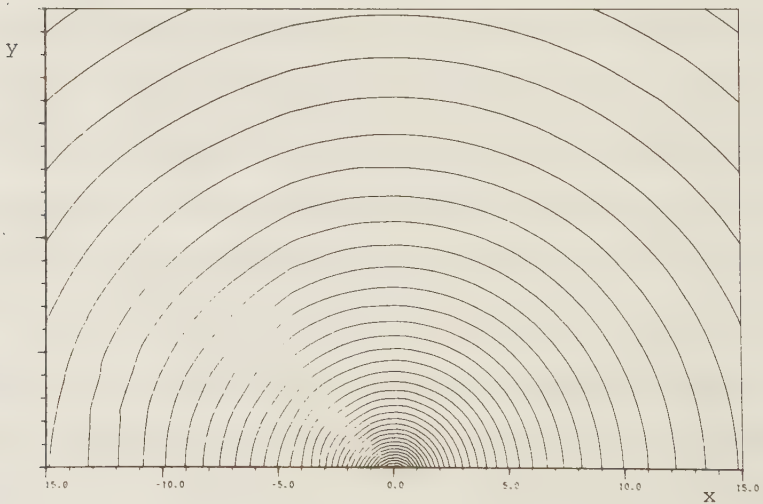


Abb. 4.2: Gleichgewicht Nr. 1 ($\lambda = 0$).

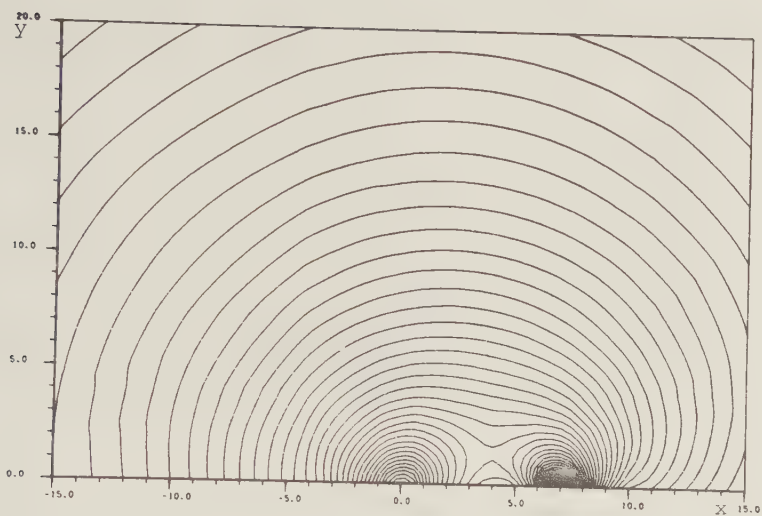


Abb. 4.3: Gleichgewicht Nr. 2 ($\lambda^* = 6,1$).

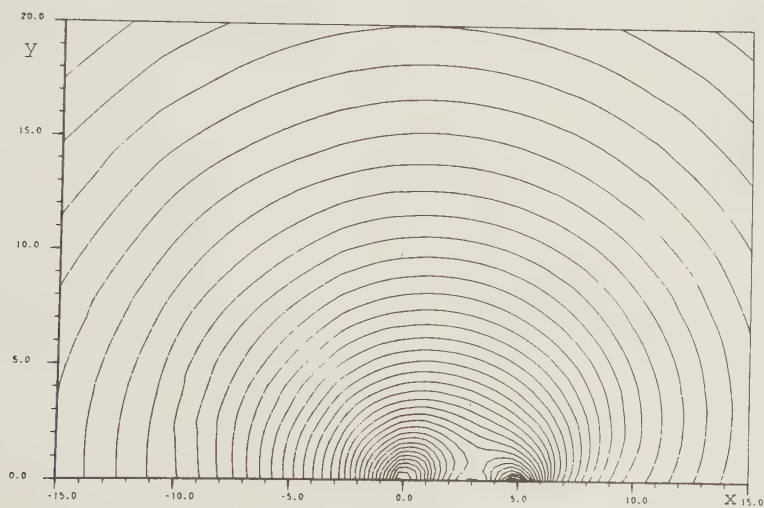


Abb. 4.4: Gleichgewicht Nr. 3 ($\lambda^* = 4$).

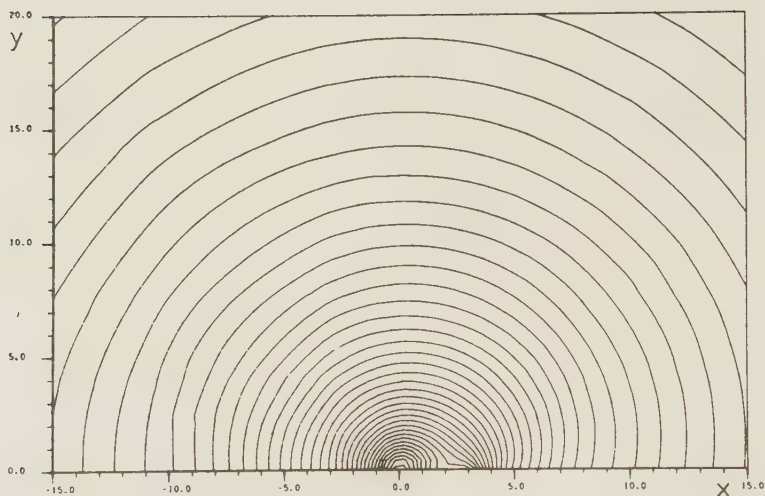


Abb. 4.5: Gleichgewicht Nr. 4 ($\lambda^* = 1,7$).

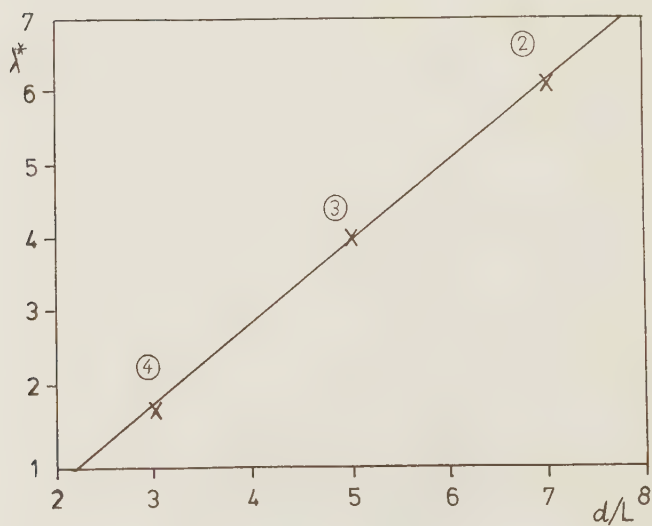


Abb. 4.6: Kritischer Wert λ^* für die Stärke des neuen Flusses als Funktion des Abstands d .

Die Behandlung des Newly-Emerging-Flux-Modells mit Hilfe des quasistatischen MHD-Gleichgewichtsmodells ergab damit folgende Ergebnisse:

1) Es konnte gezeigt werden, daß bestimmte Klassen von Randbedingungen, die durch (4.4) näher spezifiziert werden, Gleichgewichtsfolgen erlauben, die zu einem Einsatzzpunkt führen. Beim Newly-Emerging-Flux-Modell bedeutet dies, daß eine kritische Feldstärke für den neuen Fluß existiert, so daß bei deren Erhöhung kein Gleichgewicht mehr existiert.

2) Es wurde gezeigt, daß die kritische Feldstärke für den neuen Fluß fast linear mit dem Abstand zum alten Fluß zunimmt.

3) Die Gleichgewichtsfolgen sind zweidimensional stabil gegen verschiedene Arten von Instabilitäten.

Diese Ergebnisse setzen die in den Modellannahmen geforderte Polarität des neuen Flusses voraus.

Umgekehrte Polarität bedeutete, daß $A_{\text{neu}} > 0$ ist. Wenn man für J den Exponentialansatz (4.5) annimmt, ist J darstellbar als

$$J \sim e^{-2\lambda A_{\text{neu}}/A_c} e^{-2A/A_c} \quad (4.8)$$

und der positive Vorfaktor vor $\exp(-2A/A_c)$ sinkt mit wachsendem λ . Aus der mathematischen Theorie (Amann, 1976) folgt, daß λ beliebig vergrößert werden kann, so daß kein Einsatzzpunkt existiert. Aus den Abb. 4.3 bis 4.5 ist zu erkennen, daß sich bei richtiger

Polarität eine Neutralpunktkonfiguration bildet. Das Anwachsen des neuen Flusses ist mit einer gleichzeitigen lokalen Druckerhöhung verbunden, weil die neue Feldstruktur Plasma mit nach oben transportiert.

Das bei der zeitlichen Variation auftretende elektrische Feld läßt sich an der Separatrix nur aufrechterhalten, wenn wir dissipative Prozesse annehmen. Der Gültigkeitsbereich der statischen Theorie ist damit aber nicht verlassen, weil nur die Kraftbilanz (2.15) und das Ampèresche Gesetz (2.5) eingehen. Nehmen wir als dissipativen Prozess Widerstand durch binäre Stöße an, so ergibt sich eine zu große Zeitskala, denn die Diffusionszeit beträgt $\tau_D = L_O^2 / \mu_O \eta \approx 1,9 \cdot 10^9$ s für $L_O = 10^3$ km und der Leitfähigkeit in der oberen Chromosphäre. Daher ist ein kollektiver Dissipationsmechanismus erforderlich, über den aber noch wenig bekannt ist (z.B. Colgate, 1983). Eine dünne Stromschicht mit viel kleinerem L_O und daher kleinerer Diffusionszeit kann im quasistatischen Modell durch eine geeignete Stromverteilung $J(\alpha)$ beschrieben werden, dies soll hier nicht behandelt werden.

4.2 Wirkung von Magnetfeldverscherung, Plasmadruck und Gravitation

In diesem Abschnitt werden Gleichgewichtsfolgen von Plasma-Magnetfeldstrukturen behandelt, wobei als Randbedingungen an der Photosphäre Plasmadruck und Magnetfeldverscherung unabhängig voneinander vorgegeben werden. Der Einfluß der Gravitation wird untersucht, wobei bei räumlich homogener Temperatur verschiedene Skalenhöhen berücksichtigt werden.

Im vorigen Abschnitt wurde diskutiert, daß im Plasma der Sonnen-

atmosphäre die Resistivität häufig nicht ausreichend ist, um beim Einsatz eruptiver Prozesse eine wesentliche Rolle zu spielen (z.B. Kulsrud, 1982). Heyvaerts et al. (1982) schlagen ein zum Newly-Emerging-Flux-Modell alternatives Konzept vor, das als Auslöser des Flares eine großräumige Instabilität der Plasma-Magnetfeld-Struktur annimmt. Beim Modell von Kopp und Pneuman (1976) wird als Ursache des Flares eine Instabilität vorgeschlagen, die die Feldstruktur öffnet (Kapitel 1.2). In diesem Modell ist die Resistivität erst in der letzten Phase wichtig, um die Teilchenbeschleunigung, Aufheizung der Korona und Bildung der H_α -Ribbons zu erklären. Diese Phase wurde eingehend behandelt (Pneuman, 1981; Forbes und Priest, 1983), während die Erklärung der Instabilität zur Öffnung der Feldstruktur noch aussteht (Pneuman, 1981). An dieser Stelle wird deshalb die quasistatische Entwicklung bipolarer Strukturen ohne Neutralpunkt behandelt.

Ein Schwachpunkt bei selbstkonsistenten zweidimensionalen magnetostatischen Gleichgewichtsmodellen (Low, 1977; Jockers, 1978; Birn et al., 1978; Priest und Milne, 1980; Heyvaerts et al., 1982) ist die Verwendung der Grad-Shafranov-Gleichung (2.24). Wie schon in Kapitel 2.2 diskutiert, ist bei der Grad-Shafranov-Gleichung die Vorgabe der Verscherung nicht explizit möglich, sondern nur die Vorgabe von B_z , dies ist aber eine unphysikalische Randbedingung. Wenn man für eine Gleichgewichtsfolge einen Einsatzzpunkt bei Erhöhung von B_z gefunden hat, bedeutet dies nicht, daß man einen Einsatzzpunkt für wachsende Verscherung gefunden hat. Es ist zwar immer möglich, die Verscherung aus B_z nachträglich zu bestimmen,

dann ist aber nur gezeigt, daß man den kritischen Punkt erreichen kann. Es kommt darauf an, daß die Möglichkeit besteht, das System durch explizite Vorgabe der Randbedingung über den kritischen Punkt hinauszutreiben.

Die an dieser Stelle betrachteten Gleichgewichtsfolgen werden deshalb mit dem Ansatz der Euler-Potentiale berechnet, der explizite Vorgabe der Verscherung erlaubt. Diese Behandlung von Gleichgewichtsstrukturen wurde für den Spezialfall kraftfreier Felder ($\underline{j} \times \underline{B} = 0$) im zweidimensionalen Fall von Barnes und Sturrock (1972) und im dreidimensionalen Fall von Sakurai (1981) durchgeführt. Unser Modell (Kapitel 4.4) beschränkt sich nicht auf kraftfreie Felder, sondern erlaubt die Berechnung von Gleichgewichten mit Vorgabe der Fußpunkte der Feldlinien am Rand und mit Vorgabe des Plasmadrucks, außerdem wird die Gravitation berücksichtigt. Das Verfahren liefert darüber hinaus ein Stabilitätskriterium gegen Störungen in der idealen MHD.

Es sollen magnetische Arkadenstrukturen behandelt werden, die für Two-Ribbon-Flares relevant sind. Wie beim Newly-Emerging-Flux-Modell genügt eine zweidimensionale Beschreibung, weil diese Arkadenstrukturen sehr langgestreckt sind (Birn und Schindler, 1981). Der Ansatz der Euler-Potentiale (2.17) erlaubt es, die Verscherung des Magnetfeldes explizit vorzugeben. Wir verzichten damit allerdings auf die Möglichkeit, qualitative Aussagen mit Hilfe einer mathematischen Theorie zu machen, wie es sie für die Grad-Shafranov-Gleichung gibt, und sind angewiesen auf die numerischen Rechnungen. Diese Rechnungen sollen eine Übersicht geben über die Entwicklungsmöglichkeiten von Plasma-Magnet-

feldstrukturen als Reaktion auf Verscherung und Druckerhöhung an der Photosphäre.

Eine einfache Randbedingung, die eine Arkadenstruktur ergibt, ist die eines Liniendipols unterhalb der Photosphäre bei $y = -y_0$, dargestellt durch

$$d(x, y=0) = \frac{d_c y_0 L}{x^2 + y_0^2} \quad (4.9)$$

Mit $\tilde{\beta}$ wird die Verscherung vorgeschrieben. Dies wird illustriert durch die Skizze (4.7). $\tilde{\beta} + z$ ist konstant längs einer Feldlinie, damit erhält man für die Verscherung der Fußpunkte

$$\Delta z = \tilde{\beta}(x_1, 0) - \tilde{\beta}(x_2, 0) \quad (4.10)$$

Wir benutzen die Funktion

$$\tilde{\beta} = \lambda_s L \tanh(x/L) \quad (4.11)$$

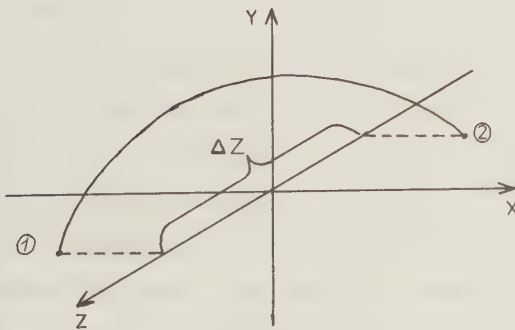


Abb. 4.7

Diese Funktion beschreibt die Verscherung an der Photosphäre, wobei deren Stärke durch λ_s gegeben ist. Mit der Randbedingung (4.9) ergibt sich, daß die Verscherung an der Neutrallinie ($B_y = 0$) verschwindet, wie es die Beobachtungen zeigen (Zirin und Tanaka, 1973). Damit sind die Randbedingungen für das Magnetfeld als Dirichlet-Randbedingungen an der Photosphäre festgelegt. Weil wir ein numerisches Verfahren benutzen, das naturgemäß nur für begrenzte Gebiete anwendbar ist, wählen wir ein genügend großes (rechteckiges) Grundgebiet, so daß an der Berandung fast ein Vakuumfeld vorliegt (z.B. Bild 4.9). Testrechnungen mit veränderter Abmessung des Grundgebietes sollen demonstrieren, daß dessen Größe wenig Einfluß auf die Ergebnisse der Rechnung hat. An der vertikalen Berandung werden Dirichlet-Randbedingungen (4.9) und (4.11) vorgeschrieben, an der oberen Begrenzung hingegen homogene Neumann-Randbedingungen. Die letzte Bedingung soll eine Öffnung der Feldstruktur wie beim Modell von Pneuman und Kopp ermöglichen. Bild (4.9) zeigt das Magnetfeld mit den oben beschriebenen Randbedingungen zu $\lambda_s = 0$, d.h. ohne Verscherung. Diese Struktur ähnelt der eines Helmet Streamers.

Da wir uns bei der Berechnung der Gleichgewichtsfolgen nicht auf den kraftfreien Fall beschränken werden und Gravitation einbeziehen, sind Annahmen für die Druckverteilung und Temperaturverlauf zu treffen. Bei der Wahl der Temperaturverteilung ist für eine realistische Beschreibung die Energiegleichung (2.8) zu lösen. Wir betrachten hier den Fall konstanter Temperatur, d.h. die Wärmeleitung soll die Heizungs- und Verlustterme überwiegen. Dann wird (2.23) für den zweidimensionalen Fall

$$P(\alpha, y) = p_0(\alpha) e^{-y/H} \quad (4.12)$$

H ist die Skalenhöhe für die Gravitation, für die untere Korona mit einer mittleren Temperatur von 10^6 K (Athay, 1976) ergibt sich $H = 5 \cdot 10^4$ km. Bei einer typischen Längenskala L von 10^4 km (Kapitel 2.1) ist $H = 5 L$. Der größte Teil der Rechnungen wurde mit $H = 5 L$ durchgeführt. Die Werte für T und L sind zwar repräsentativ, gelten aber nicht generell. Es werden deshalb Rechnungen mit $H = 10 L$ und $H = 2 L$ vorgestellt.

Wie aus (4.12) hervorgeht, wird P_0 als Funktion von α allein als Randbedingung vorgegeben. Die Wahl der Druckfunktion wird zweckmäßig mit der Randbedingung (4.9) für α diskutiert. Die Wahl der Exponentialfunktion (4.5) ist hier nicht sinnvoll, weil wir dann kein Vakuumfeld für große Abstände erhalten. Die einfachste Annahme ist die einer algebraischen Funktion. Zweckmäßig ist eine Wahl, bei der nur Feldlinien, die den Rand schneiden, einen durch den Druckgradienten verursachten Strom führen. Dies soll der Bildung geschlossener Feldlinien entgegenwirken (Kapitel 2.2). Wir wählen

$$\frac{dP_0(\alpha)}{d\alpha} = \begin{cases} \lambda_p (\alpha_c^{-3} L^{-2} \mu_0^{-1}) \alpha^4 (1 - \alpha/\alpha_c)^2, & 0 < \alpha < \alpha_c \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.13)$$

Für $\tilde{\beta} = 0$ (keine Verscherung) erhält man aus der mathematischen Theorie (Heyvaerts et al., 1980; 1982; siehe auch Kapitel 2.3) die Existenz eines Einsatzpunktes für λ_p als Parameter, das Lösungsdiagramm ist vom Typ der S-Kurve (Abb. 1.3d).

Die Rechnungen wurden mit den oben angegebenen Randbedingungen auf einem rechteckigen Grundgebiet mit $-20 \text{ L} \leq x \leq 20 \text{ L}$ und $0 \leq y \leq 30 \text{ L}$ durchgeführt. Die Auflösung betrug 19×19 Stützstellen, wobei das Zentrum der bipolaren Strukturen (x und y klein) stärker aufgelöst wurde. Zur Kontrolle wurden einige Rechnungen mit vergrößertem Grundgebiet ($0 \leq y \leq 40 \text{ L}$) und mit größerer Genauigkeit (21×21 Stützstellen) durchgeführt. Die Abweichungen lagen im Bereich weniger Prozent.

Als erste Anwendung wurden Folgen betrachtet, bei denen die als Randbedingung vorgegebene Verscherung erhöht wurde, weil dieses Verhalten von Beobachtern (Zirin und Tanaka, 1973) und Theoretikern (z.B. Low, 1977) als auslösender Faktor eines eruptiven Prozesses vorgeschlagen wurde. Wir beschränken uns nicht auf kraftfreie Felder, sondern beziehen einen Druckgradienten in die Rechnung ein. Es wird eine Skalenhöhe von $H = 5 \text{ L}$ angenommen, $\lambda_p = 1$ in (4.13) und das Verscherungsfeld (4.11). Im Lösungsdiagramm (4.8) sind die magnetische Energie und die thermische Energie als Funktion von λ_s aufgetragen. Man erkennt, daß kein Einsatzzpunkt existiert. Die Rechnungen wurden bis $\lambda_s \approx 16$ fortgesetzt, ohne daß ein Anzeichen für ein Aufhören der Folge gefunden wurde. Außerdem sind alle Gleichgewichte zweidimensional stabil, so daß auch kein Einsatz einer dynamischen Phase, verursacht durch eine ideale MHD-Instabilität, erfolgt.

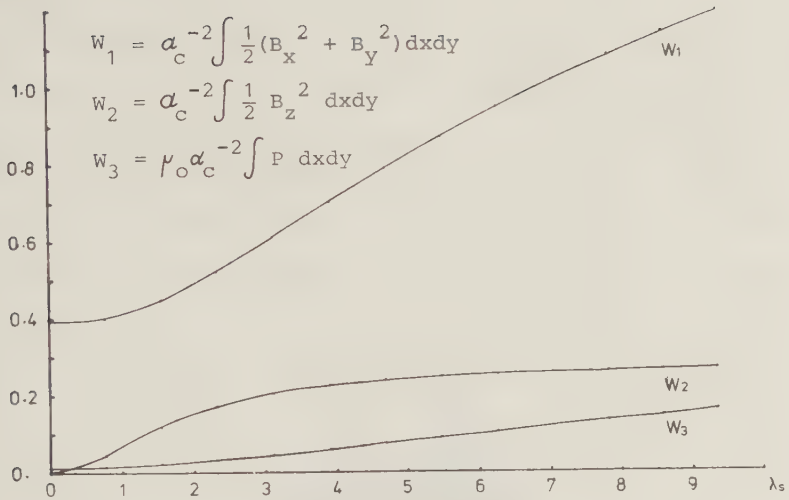


Abb. 4.8: Gleichgewichtsdiagramm, λ_s ist die Stärke der Ver-
 scheidung. Parameter: $\lambda_p = 1$. Lösung 1 und 2 sind in Abb. 4.9
 und 4.10 dargestellt. ($y_o = L$, $H = 5 L$ (Skalenhöhe))

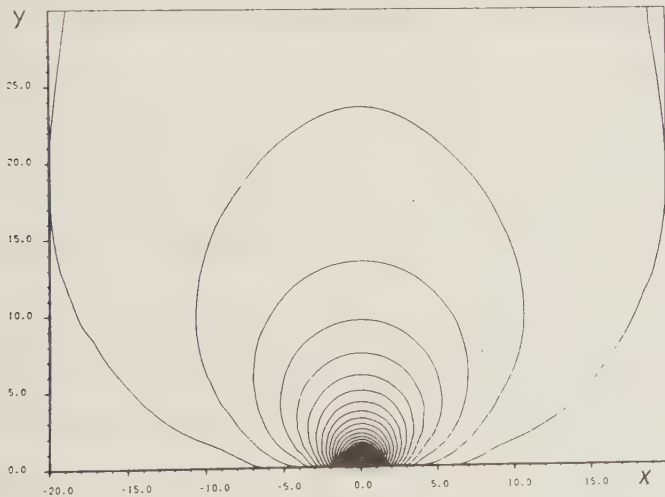


Abb. 4.9: Gleichgewicht Nr. 1 (Abb. 4.8), $\lambda_p = 1$, $\lambda_s = 0$.

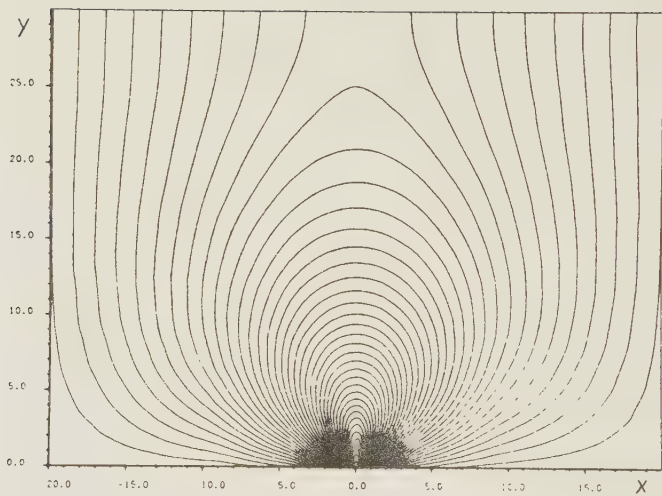


Abb. 4.10: Gleichgewicht Nr. 2 (Abb. 4.8), $\lambda_p = 1$, $\lambda_s = 8,5$.

Das Magnetfeld für $\lambda_s = 0$, also ohne Verscherung, aber mit endlichem Druckanteil, zeigt Abb. 4.9. Erhöht man die magnetische Verscherung, so wird die Struktur in vertikaler Richtung langgestreckter, wie in Abb. 4.10 für $\lambda_s = 8,5$ gezeigt ist. Dies entspricht einer Öffnung der Feldstruktur, durch die obere Berandung geht nun mehr Magnetfluß als bei $\lambda_s = 0$. Die gespeicherte Energie nimmt mit wachsender Verscherung zu. Die magnetische Energie der ebenen $\underline{B}$ -Komponente ($B_x, B_y, 0$) nimmt näherungsweise linear zu, weil die Feldlinien in vertikaler Richtung langgestreckt werden. Die thermische Energie nimmt ebenfalls zu, weil das Volumen der Flußröhren, die Plasma enthalten, vergrößert wird. Der Anteil der thermischen Energie bleibt stets kleiner als die magnetische Energie. Die Energie der B_z -Komponente wächst in λ_s zunächst an, scheint aber bei großer Verscherung einem Grenzwert zuzustreben. Wir erhalten damit folgende Ergebnisse: Die Verscherung einer magnetischen Arkadenstruktur führt dazu, daß die Struktur in vertikaler Richtung ausgedehnt wird. Man erhält keinen Einsatzzpunkt bei wachsender Verscherung. Die gespeicherte Energie wächst mit der Verscherung. Diese Ergebnisse wurden zwar schon von Barnes und Sturrock (1972) und Sakurai (1981) erhalten, aber nur für den Fall kraftfreier Felder, während bei unserer Rechnung ein Druckgradient einbezogen ist.

Weil die Berechnung von Gleichgewichtsfolgen mit wachsender Verscherung keinen Einsatzzpunkt lieferte, wurden alternativ Folgen mit wachsendem Druck und konstanter Verscherung bestimmt. Die Randbedingungen sind dabei die gleichen wie beim vorigen Beispiel. Es wurde im Lösungsdiagramm (Abb. 4.11) die Gesamtenergie aller berechneten Gleichgewichte aufgetragen und im Dia-

gramm (Abb. 4.12) die Anteile der magnetischen und thermischen Energie getrennt. Zum Vergleich wurde gestrichelt die Lösungskurve für $\lambda_s = 0$ in Abb. 4.11 eingezeichnet. Dieses Beispiel wurde zu ähnlichen Randbedingungen von Heyvaerts et al. (1982) gefunden. Die Feldstruktur zu $\lambda_p = 0$, also ohne Druck, aber mit Verscherung $\lambda_s = 2$, ist in 4.13. abgebildet. Das Diagramm 4.11 zeigt, daß der Druck bis $\lambda_p = 3,9$ erhöht werden kann. Der untere Ast ist stabil, so daß der Einsatzpunkt auf stabilem Weg erreicht werden kann. Die innere Region der Feldstruktur wurde in vertikaler Richtung weiter auseinandergezogen (Abb. 4.14). Eine Betrachtung der Energieanteile (Abb. 4.12) zeigt, daß die thermische Energie zu Beginn der Folge (kleine λ_p) klein gegenüber der magnetischen Energie ist, aber bis zum Einsatzpunkt λ_p eine vergleichbare Größe erreicht. Dieses Verhalten ist qualitativ anders als beim vorigen Beispiel mit wachsender Verscherung. Es ist noch interessant, daß die magnetische Energie der B_z -Komponente abnimmt. Dies läßt sich erklären durch die Streckung der Feldstruktur für größer werdendes λ_p .

Mit unserer Theorie der Gleichgewichtsfolgen ist es nicht möglich zu ermitteln, wie die dynamische Phase nach dem Einsatz aussieht, es kann nur vorausgesagt werden, daß bei geeigneter Variation der Randbedingungen kein Gleichgewicht mehr existiert. Bei einem Verhalten wie in Abb. 4.11 ist ein Übergang auf ein Gleichgewicht auf dem oberen Ast der Lösungskurve zu gleichem λ_p denkbar. Dieser Ast ist, genauso wie der untere, zweidimensional stabil. Die dazugehörige Feldstruktur zeigt Abb. 4.15. Das Gleichgewicht enthält geschlossene Feldlinien und einen Neutralpunkt vom x-Typ. Eine Feldstruktur dieser Art ist in der von Pneuman (1983) beschriebenen neuen Variante des Modells von Kopp und Pneuman (1976) ent-

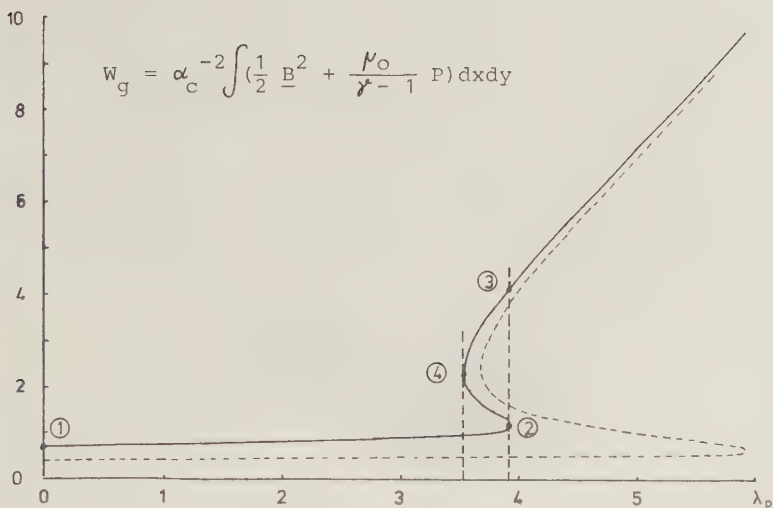


Abb. 4.11: Gleichgewichtsdiagramm, λ_p legt den Druck fest, Parameter für die Verscherung: $\lambda_s = 2$ für die durchgezogene, $\lambda_s = 0$ für die gestrichelte Kurve. Lösungen 1 bis 4 sind in Abb. 4.13 bis 4.16 gezeigt ($y_0 = L$, $H = 5 L$ (Skalenhöhe), $\gamma = 5/3$).

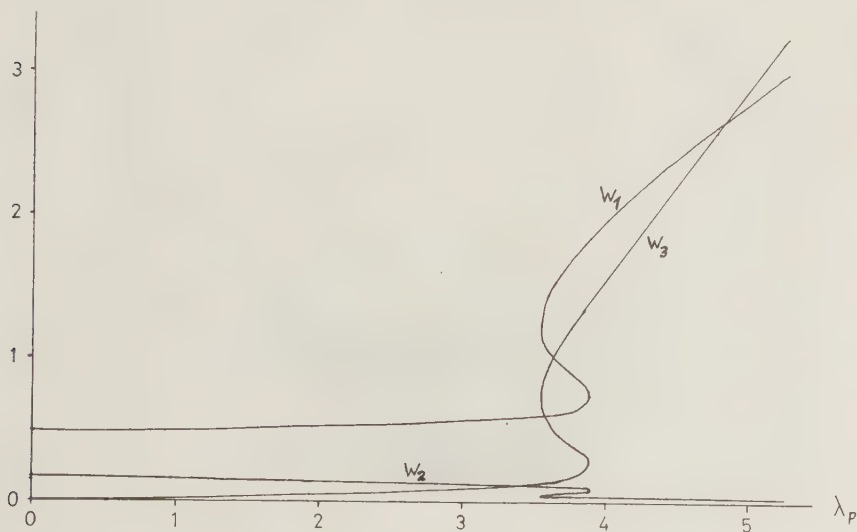


Abb. 4.12: Gleichgewichtsdiagramm, die Energieanteile sind getrennt aufgetragen, sonst wie Abb. 4.11. (W_1 , W_2 , W_3 sind in Abb. 4.8 definiert.)



Abb. 4.13: Gleichgewicht Nr. 1 (Abb. 4.11), $\lambda_p = 0$.

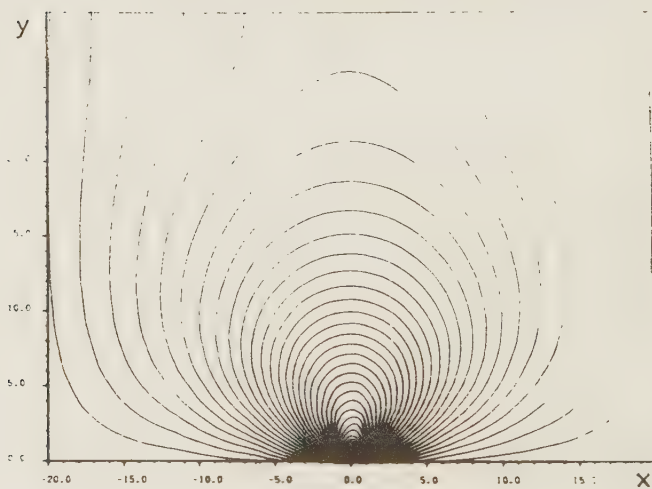


Abb. 4.14: Gleichgewicht Nr. 2 (Abb. 4.11), $\lambda_p = 3,9$.

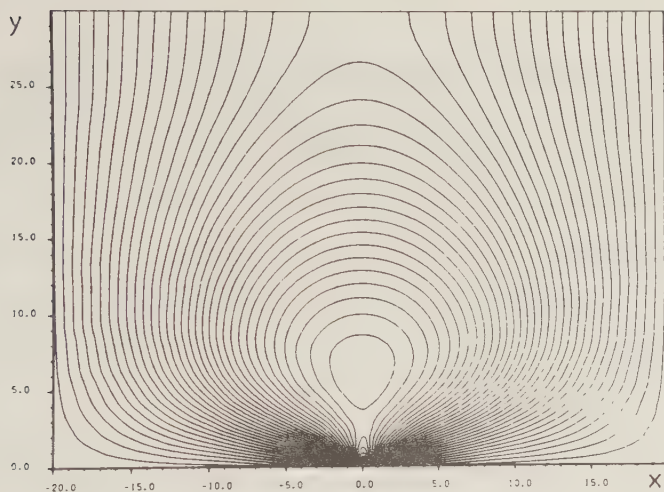


Abb. 4.15: Gleichgewicht Nr. 4 (Abb. 4.11), $\lambda_p = 3,9$ (oberer Ast).

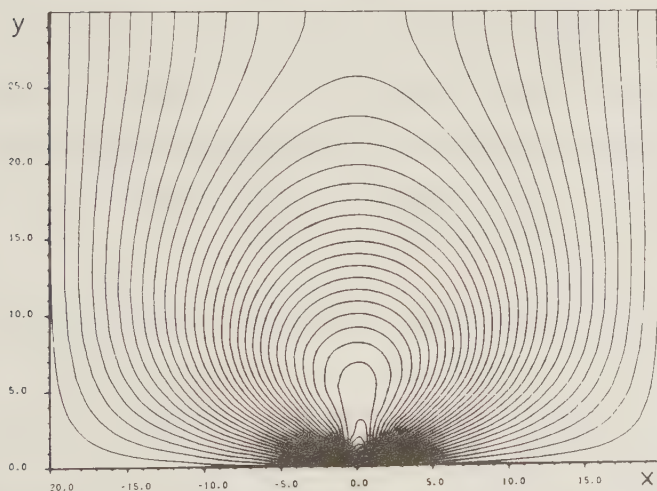


Abb. 4.16: Gleichgewicht Nr. 4 (Abb. 4.11), $\lambda_p = 3,5$ (mittlerer Ast).

halten (siehe auch Kuperus und van Tend, 1981). Sie wird als Hauptphase eines Two-Ribbon-Flares vorgeschlagen, in dem durch Rekonnektion die beobachteten Effekte wie Teilchenbeschleunigung und Bildung der H_{α} -Ribbons erklärt werden (Kapitel 1.2). Im Rahmen unserer Theorie kann diese Struktur als Endphase einer dynamischen Entwicklung interpretiert werden, wobei die quasistatische Phase vor dem Einsatz des aktiven Prozesses quantitativ beschrieben werden kann und die Ursache für den Einsatz selbst geklärt wird.

Bei der Interpretation als dynamischen Übergang ist der größere Energieinhalt des Gleichgewichts auf dem oberen Ast zu beachten. In diesem Fall müßte durch die Photosphäre genügend Energie nachgeliefert werden. Dies ist aber durchaus denkbar, weil kein geschlossenes System vorliegt. Der dynamische Prozesse würde in diesem Fall die Region unterhalb der Photosphäre als Energiereservoir anzapfen. Diese Betrachtung ist an dieser Stelle noch spekulativ, allein mit Hilfe einer Behandlung der dynamischen Phase mit einem entsprechenden Modell kann geklärt werden, was am Einsatzpunkt tatsächlich passiert.

Die Gleichgewichtskurve in Abb. 4.11 enthält einen weiteren kritischen Punkt auf dem oberen Teil der Lösungskurve bei $\lambda_p = 3,5$. Das zu $\lambda_p = 3,5$ gehörende Gleichgewicht zeigt Abb. 4.16. Die Struktur ist durch die Wirkung des Drucks nach oben auseinandergezogen, enthält aber keine Neutralpunkte. Dieses Gleichgewicht wird dynamisch bei verringertem photosphärischen Druck, d.h. kleiner werdendem λ_p . Zu gleichem λ_p existiert ein stabiles Gleichgewicht auf dem unteren Ast, das weniger Energie enthält. In diesem Fall würde bei einem Übergang die in der Struktur gespeicherte Energie freigesetzt.

An dieser Stelle soll abgeschätzt werden, von welcher Größenordnung die gespeicherte Energie ist. Mit einem Magnetfeld von 0,01 T, $L = 10^4$ km und einer typischen Länge der Struktur von $2 \cdot 10^5$ km erhält man für die Energie $W = 1,6 \cdot 10^{24} \text{ J} \cdot W_g$, wobei W_g das in den Diagrammen 4.11, 4.17 und 4.19 aufgetragene Maß für die Gesamtenergie ist. Die Energiedifferenz zwischen Gleichgewicht 2 und 3 in Abb. 4.11 beträgt damit $2 \cdot 10^{24} \text{ J}$, zwischen Gleichgewicht 4 und dem zum gleichen λ_p auf dem unteren Ast 10^{24} J . Diese Werte sind von gleicher Größenordnung wie die bei einem Two-Ribbon-Flare freigesetzte Energie.

Wir kommen nun zurück zur Rolle der magnetischen Verscherung. Die beiden Kurven in Abb. 4.11 zeigen, daß der kritische Wert λ_p für den Druck ohne Verscherung größer ist. Man erhält aber für den Wert $\lambda_s = 2$ kein qualitativ anderes Verhalten als das von Heyvaerts et al. (1982) gefundene. Es wurden deshalb weitere Gleichgewichtsfolgen in λ_p bei verschiedenen konstanten λ_s bestimmt, um eine Übersicht über den Parameterraum zu erhalten, der von den Werten für Druck und Verscherung gebildet wird. Es wurde die Gesamtenergie jeder Lösung in Abb. 4.17 aufgetragen. Man erkennt aus dem Diagramm folgende Eigenschaften:

- 1) Ohne Plasmadruck konnte kein Einsatzzpunkt festgestellt werden; es ist daher anzunehmen, daß das Vorhandensein endlichen Drucks für den Einsatz dynamischer Prozesse wesentlich ist.
- 2) Für kleine und mittlere Verscherungen erhält man eine "gefaltete" Lösungskurve, bei Druckerhöhung (größeres λ_p) gelangt man

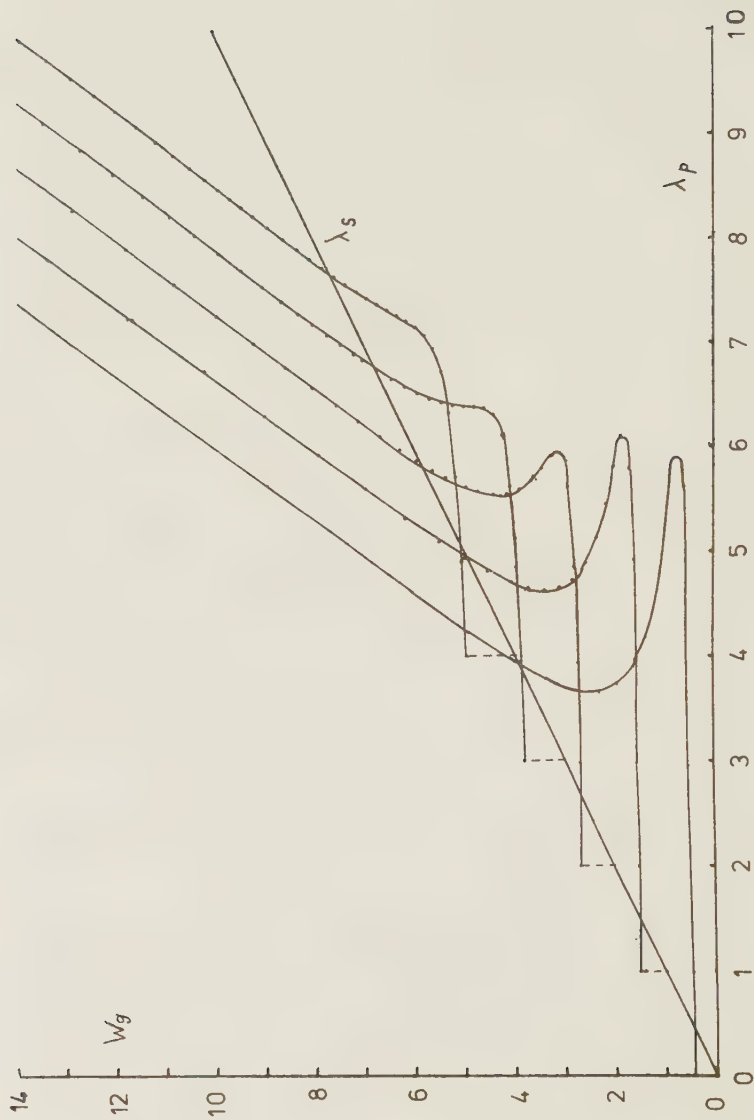


Abb. 4.17: Gleichgewichtsdiagramm
 ($\lambda_P \hat{=}$ Druck, $\lambda_S \hat{=}$ magnetische Verscherung, Skalenhöhe $H = 5 L$)
 $\lambda_S = 0$ bis $\lambda_S = 4$

an einen kritischen Punkt, wo eine stetige Fortsetzung der Gleichgewichtsfolge aufhört, das gleiche gilt für den oberen Teil der Lösungskurve, wo die Folge bei Druckerniedrigung an einen kritischen Punkt führt.

3) Bei großer Verscherung verschwinden die kritischen Punkte.

Der in Abb. 4.18 schraffierte Bereich zeigt den Teilbereich der λ_p - λ_s -Ebene, in dem 3 Lösungsflächen übereinanderliegen. Dieser Bereich endet bei $\lambda_s = 2,8$. Die Abb. 4.18 zeigt auch, wie der kritische Wert von λ_p der unteren Lösungskurve mit wachsender Verscherung abnimmt. Es folgt also für unsere Gleichgewichtsfolgen, daß mittlere Verscherung destabilisiert, große Verscherung hingegen wieder stabilisiert.

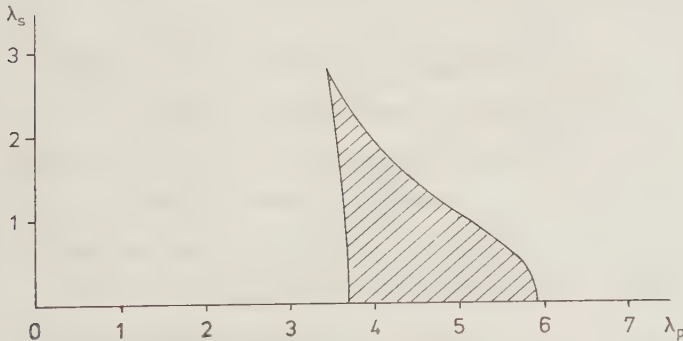


Abb. 4.18

Bei den oben vorgestellten Rechnungen wurde jeweils eine Skalen-

höhe von $H = 5 L$ angenommen, was bei den für die Korona typischen Werten für H und L ein repräsentativer Wert ist. Es soll an dieser Stelle das Verhalten der Gleichgewichte bei unterschiedlicher Skalenhöhe untersucht werden. Dabei wird bestimmt, wie stark der Einfluß der Gravitation ist und ob man bei abweichender Skalenhöhe ein qualitativ anderes Verhalten der quasistatischen Entwicklung als das in Abb. 4.17 dargestellt erhält. Dazu wurden, wie bei Diagramm 4.17 beschrieben, mehrere Gleichgewichtsfolgen berechnet, diesmal jedoch mit der Skalenhöhe $H = 10 L$. Die Ergebnisse sind in Abb. 4.19 zusammengefaßt. Man erhält eine ähnliche Schar von Lösungskurven wie die zur Skalenhöhe $H = 5 L$. Der kritische Wert λ_p für den Druck am jeweiligen Einsatzzpunkt ist allerdings deutlich reduziert. Der destabilisierende Effekt der Verscherung zeigt sich hier noch deutlicher als bei der kleinen Skalenhöhe. Die Einsatzzpunkte in λ_p verschwinden aber auch hier bei $\lambda_s \approx 5$.

Damit wurde gezeigt, daß die Gravitation eine stabilisierende Wirkung haben kann. Dies kann man folgendermaßen interpretieren: Das Ergebnis unserer bisherigen Rechnungen war, daß ein genügend großer Druckgradient für die Existenz von Einsatzzpunkten wesentlich ist. Bei kleiner Skalenhöhe der Gravitation ist aber das Gebiet verkleinert, in der eine Kraftwirkung durch den Druckgradienten eine Rolle spielen kann, so daß eine stabilisierende Wirkung erzielt wird.

Um diese stabilisierende Wirkung deutlicher zu zeigen, wurden Gleichgewichtsfolgen mit der Skalenhöhe $H = 2 L$ bestimmt. Dabei wurde für Werte der Verscherung von $\lambda_s = 0$ bis $\lambda_s = 5$ ein stetiges Verhalten bei Erhöhung von λ_p gefunden, Einsatzzpunkte

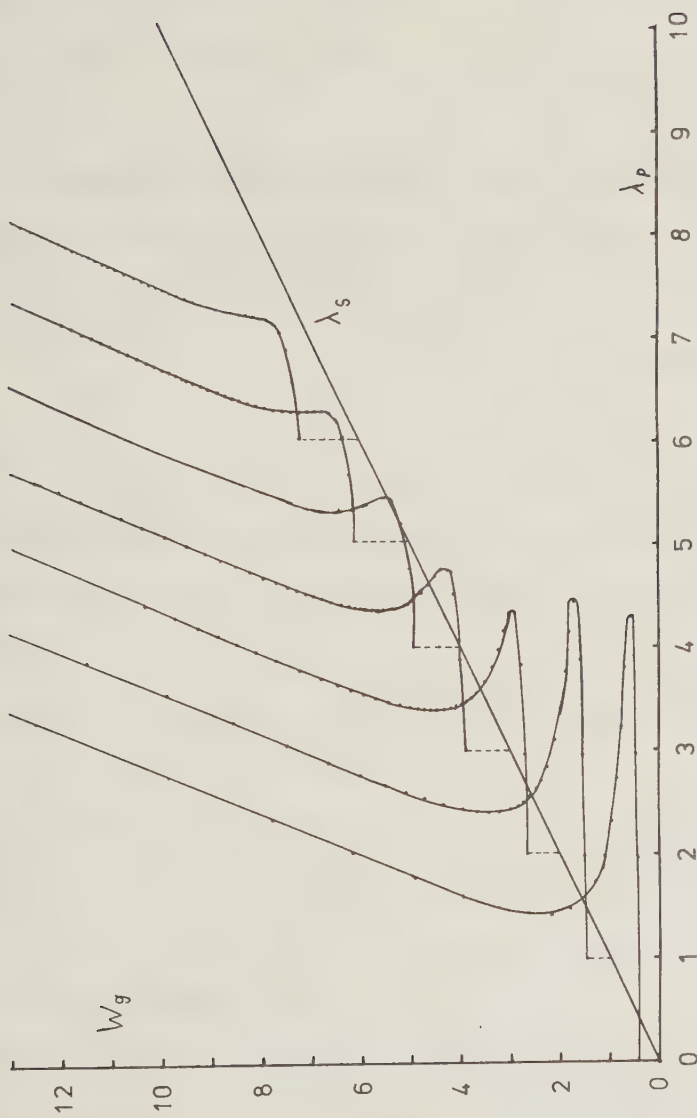


Abb. 4.19: Gleichgewichtsdiagramm, Skalenhöhe $H = 10 L$, $\lambda_s = 0$ bis $\lambda_s = 6$.

traten nicht auf.

4.3 Einfluß stationärer Strömung

In diesem Abschnitt soll die Entwicklung von Gleichgewichtsfolgen mit stationärer Strömung untersucht werden, wobei die Frage im Vordergrund steht, in welcher Weise die Anwesenheit von Strömung die Lage von Einsatzzpunkten im Vergleich zum statischen Fall beeinflusst.

Wie schon in Kapitel 2.2 behandelt, werden schon in den tieferen Schichten der Sonnenatmosphäre bei ruhigen Zeiten stationäre Strömungen beobachtet mit Strömungsgeschwindigkeiten klein gegenüber Schall- und Alfvéngeschwindigkeit. Die obere Korona schließt an den Sonnenwind an, wo Überschallgeschwindigkeit erreicht wird. In den äußeren Regionen eines Helmet Streamer (Abb. 1.2b) fließt Plasma in den Sonnenwind ab. Die im vorigen Abschnitt vorgegebenen Randbedingungen für statische Gleichgewichte sollten eine geöffnete Feldstruktur wie bei einem Streamer simulieren. Die statische Theorie ist zur näherungsweisen Behandlung stationärer Gleichgewichte geeignet, wenn die magnetischen Kräfte die Trägheitskräfte überwiegen (siehe Übersicht von Priest, 1982). Um den Einfluß von Strömung quantitativ zu bestimmen, werden stationäre Gleichgewichte mit einem selbstkonsistenten Modell (Kapitel 3.3) behandelt, das die Trägheitskräfte in der Kraftgleichung berücksichtigt. Das Modell wird zur Untersuchung ähnlicher Strukturen wie in Kapitel 4.2 angewandt.

Wir werden uns auf den Fall inkompressibler Strömung beschränken. Wie in den beiden vorigen Abschnitten sollen zweidimensionale Strukturen behandelt werden. Stationäre Gleichgewichte werden dann durch die Gleichungen (3.124) und (3.127) beschrieben. Das elektrische Feld soll verschwinden, so daß feldlinienparallele Strömung vorliegt. Außerdem beschränken wir uns auf Strukturen ohne magnetische Verscherung, so daß $\tilde{\beta} = 0$ in (3.124) und (3.127). (3.124) ist dann identisch erfüllt. (3.127) reduziert sich mit diesen Annahmen auf die Form

$$-(1 - M_A^2(\alpha)) \Delta \alpha + \frac{1}{2} \frac{dM_A^2(\alpha)}{d\alpha} (\nabla \alpha)^2 = \mu_0 \frac{d\mathcal{H}(\alpha)}{d\alpha} \quad (4.14)$$

wobei M_A durch (3.128) und $\mathcal{H}$ durch (3.126) definiert ist. Als Randbedingung an der Photosphäre wird (4.9) angenommen, was eine einfache bipolare Struktur darstellt. Aus den in Kapitel 4.2 diskutierten Gründen wählen wir für den Strom $d\mathcal{H}/d\alpha$ den Ansatz

$$\frac{d\mathcal{H}(\alpha)}{d\alpha} = \lambda_p \frac{d\mathcal{H}_0(\alpha)}{d\alpha} = \begin{cases} \lambda_p (\alpha_c^{-3} \mu_0^{-2-1}) \alpha^4 (1 - \alpha/\alpha_c)^2, & 0 < \alpha < \alpha_c \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.15)$$

Um den Einfluß von Strömung an einem sehr einfachen Beispiel zu untersuchen, soll zunächst der Fall $M_A = \text{konst.}$ betrachtet werden. (4.14) reduziert sich dann zu

$$-\Delta \alpha = \frac{\lambda_p}{1 - M_A^2} \mu_0 \frac{d\mathcal{H}_0}{d\alpha} \quad (4.16)$$

Dies stellt die Grad-Shafranov-Gleichung dar, so daß wir für $M_A = \text{konst.}$ alle Ergebnisse der Theorie statischer Gleichgewichte übernehmen können. Aus der Theorie von Heyvaerts et al. (1980) folgt, daß für wachsendes λ_p ein Einsatzzpunkt λ_p^* existiert. Gegenüber dem statischen Fall $M_A = 0$ ist dieser Wert von λ_p aber

um den Faktor $(1 - M_A^2)$ verkleinert. Für dieses einfache Beispiel ergibt sich also ein destabilisierender Effekt bei stationärer Strömung.

Für eine realistischere Beschreibung mit nicht konstantem M_A wurde Gleichung (4.14) mit dem in Kapitel (4.4) behandelten Verfahren numerisch gelöst. Das Grundgebiet wird in Abb. 4.21 gezeigt. An der photosphärischen und seitlichen Begrenzung wird wie in Kapitel 4.2 (4.9) als Dirichlet-Randbedingung angenommen; an der oberen Berandung werden homogene Neumann-Randbedingungen vorgeschrieben.

In einem Streamer soll das Plasma längs offener Feldlinien in den Sonnenwind abströmen ($M_A \neq 0$), während es in geschlossenen Feldlinien als statisch angenommen wird ($M_A = 0$). Das numerische Verfahren muß also ein Kriterium erhalten, das offene und geschlossene Feldlinien unterscheidet. Dies wird durch die folgende Methode erreicht: Wegen der Symmetrie des Gebiets und der Randbedingung (4.9) fällt das Potential α für steigende Werte von $|x|$ an der oberen Begrenzung monoton ab, für $x = 0$ wird ein Maximalwert α_s angenommen. Feldlinien mit $\alpha > \alpha_s$ schneiden den oberen Rand nicht mehr und werden als geschlossen definiert, während solche mit $\alpha < \alpha_s$ offene Feldlinien sind. Für die lokale Alfvén-Machzahl M_A wird angesetzt

$$M_A(\alpha) = \begin{cases} \frac{2(\alpha - \alpha_s)^2}{\alpha_c^2 + 2(\alpha - \alpha_s)^2} & , \quad \alpha < \alpha_s \\ 0 & , \quad \alpha \geq \alpha_s \end{cases} \quad (4.17)$$

Für $\alpha < \alpha_s$ steigt die Strömungsgeschwindigkeit von 0 (bei $\alpha = \alpha_s$) auf Werte von der Größenordnung der Alfvéngeschwindigkeit an. Der Wert von α_s wird während jedes Iterationsschritts

des numerischen Verfahrens neu bestimmt.

Mit den oben angegebenen Randbedingungen und den Annahmen für $\mathcal{M}$ und M_A wurden Gleichgewichtsfolgen bestimmt, wobei der Gesamtdruck $\lambda_P \mathcal{M}_O$ erhöht wurde. Das Ergebnis der Rechnungen zeigt das Diagramm (4.20). Es sind zwei Lösungskurven aufgetragen, wobei die eine mit $M_A = 0$ bestimmt wurde und die andere mit dem durch (4.17) gegebenen Strömungsprofil. Man erhält in beiden Fällen Einsatzpunkte für wachsendes λ_P . Man sieht, daß die Anwesenheit stationärer Strömung den kritischen Wert für λ_P reduziert hat. Abb. 4.21 zeigt das Gleichgewicht am kritischen Punkt $\lambda_P = 3,1$, wobei M_A durch (4.17) gegeben ist. Der destabilisierende Effekt ist aber nicht sehr stark ausgeprägt, obwohl außen relativ hohe Strömungsgeschwindigkeiten vorliegen. Dies läßt sich dadurch erklären, daß die Dichte im Außenbereich niedrig ist.

Unsere Rechnungen schließen nicht aus, daß das Vorhandensein von Überschallströmung einen wesentlichen Effekt hat.

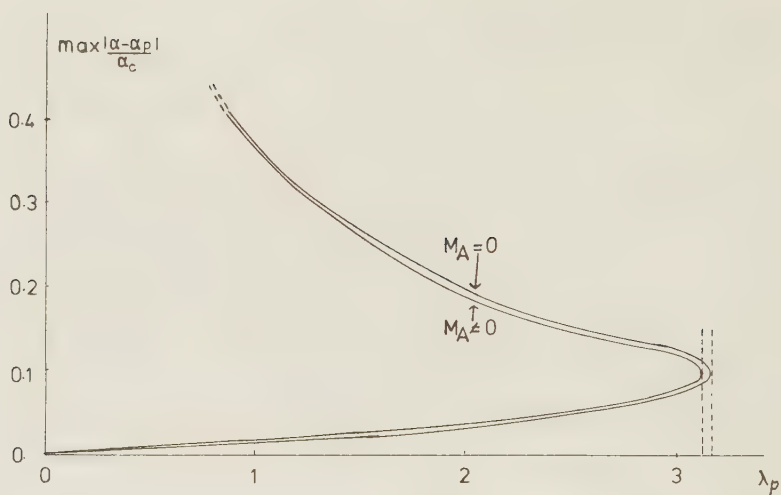


Abb. 4.20: Gleichgewichtsdiagramm, Lösungskurven für $M_A = 0$, und M_A gegeben durch (4.17). (α_p : Potentiallösung zur Randbedingung (4.9))

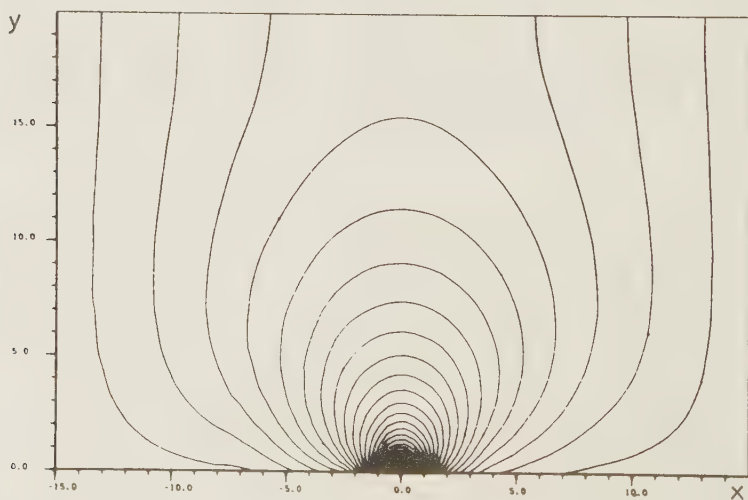


Abb. 4.21: Gleichgewicht mit stationärer Strömung, $\lambda_p^* = 3,1$ in Abb. 4.20.

Literatur

- Aly, J.J., 1983, preprint
- Alfvén, H. und Carlqvist, P., 1967, Solar Phys. 1, 220
- Amann, H., 1976, SIAM Rev. 18, 620
- Anzer, U., 1973, Solar Phys. 30, 459
- Athay, G., 1976, The Solar Corona and Chromosphere: Quiet Sun,
D. Reidel, Dordrecht/Holland
- Barnes, C.W. und Sturrock, P., 1972, Astrophys. J. 174, 659
- Barston, E.M., 1970, J. Fluid Mech. 42, 97
- Bernstein, I.B., Frieman, E.A., Kruskal, M.D. und Kulsrud, R.M.,
1958, Proc. Roy. Soc. London A244, 17
- Birn, J., 1979, J. Geophys. Res. 84, 5143
- Birn, J., Goldstein, H. und Schindler, K., 1978, Solar Phys.
57, 81
- Birn, J. und Schindler, K., 1981, in E.R. Priest (Ed.), Solar
Flare Magnetohydrodynamics, Gordon and Breach, London
- Bruzek, A. und Durrant, C.J., 1977, Illustrated Glossary for
Solar and Solar-Terrestrial Physics, D. Reidel, Dordrecht/
Holland
- Colgate, S., 1983, Proceedings of the Conference on Reconnection
in the Magnetosphere, Los Alamos, USA
- Courant, R. und Hilbert, D., 1961, Methods of Mathematical Physics,
Vol. 2, Interscience Publishers, New York
- Craig, I.J.D., 1981, in E.R. Priest (Ed.), Solar Flare Magneto-
hydrodynamics, Gordon and Breach, London
- Crandall, M.G. und Rabinowitz, P.H., 1975, Arch. Rational Mech.
Anal. 58, 207
- Dodson, H.W. und Hedeman, E.R., 1970, Solar Phys. 13, 401

- Drazin, P.G. und Reid, W.H., 1981, Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, Cambridge
- Edenstrasser, J.W., 1980, J. Plasma Phys. 24, 299
- Euler, L., 1776, Sectio Secunda de Principiis Motus Fluidorum, Novi Comentarior Acad. Sci. Petropolitanae 14, 270, abgedruckt in: Leonhardi Euleri Opera Omnia (1955), Ser. II 13, Swiss Society for Natural Science
- Forbes, T.G. und Priest, E.R., 1983, Solar Phys. 84, 169
- Furth, H.P., Killeen, J. und Rosenbluth, M.N., 1963, Phys. Fluids 6, 459
- Galindo, T.J. und Schindler, K., 1984, Astrophys. J. 277, 422
- Gold, T. und Hoyle, F., 1960, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 120, 89
- Grad, H., 1964, Phys. Fluids 7, 1283
- Grad, H., Hu, P.N. und Stevens, D.C., 1975, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 72, 3798
- Hain, K., Lüst, R. und Schlüter, A., 1957, Z. Naturforsch. 12a, 833
- Heyvaerts, J., Priest, E.R. und Rust, D.M., 1977, Astrophys. J. 216, 123
- Heyvaerts, J., Lasry, J.M., Schatzman, M. und Witomsky, G., 1982, Astron. Astrophys. 111, 104
- Heyvaerts, J., Lasry, J.M., Schatzman, M. und Witomsky, G., 1980, Springer Lecture Notes in Mathematics 782, 160
- van Hoven, G., Anzer, U., Barbosa, D.D., Birn, J., Cheng, C.-C., Hansen, R.T., Jackson, B.V., Martin, S.F., McIntosh, P.S., Makagawa, Y., Priest, E.R., Reeves, E.M., Reichmann, E.J., Schmahl, E.J., Smith, J.B., Solodina, C.V., Thomas, R.J., Uchida, Y. und Walker, A.B.C., in P.A. Sturrock, Solar Flares, Colorado Ass. University Press, Boulder
- van Hoven, G., 1981, in E.R. Priest (Ed.), Solar Flare Magnetohydrodynamics, Gordon and Breach, London

- Hu, W.R., Hu, Y.Q. und Low, B.C., 1983, Solar Phys. 83, 195
- Jockers, K., 1978, Solar Phys. 56, 37
- Keller, H.B., 1977, in P. Rabinowitz (Ed.), Applications of Bifurcation Theory, Academic Press, New York
- Kippenhahn, R. und Schlüter, A., 1957, Z. Astrophys. 43, 36
- Kopp, R.A. und Pneuman, G.W., 1976, Solar Phys. 50, 85
- Krall, K.R., Smith, J.B., Jr., Hagyard, M.J., West, E.A. und Cummings, N.P., 1982, Solar Phys. 79, 59
- Krall, N.A. und Trivelpiece, A.W., 1973, Principles of Plasma Physics, McGraw-Hill, New York
- Kulsrud, R.M., 1982, Physica Scripta T2:1, 177
- Kuperus, M. und van Tend, W., 1981, Solar Phys. 71, 125
- Lang, K.R., 1974, Astrophysical Formulae, Springer, Berlin
- Low, B.C., 1975, Astrophys. J. 197, 251
- Low, B.C., 1977a, Astrophys. J. 212, 234
- Low, B.C., 1977b, Astrophys. J. 217, 988
- Marsal, D., 1976, Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen, BI-Verlag, Mannheim
- Martin, S.F. und Ramsey, H.E., 1972, in P. McIntosh und M. Dryer (Ed.), Solar Activity, Observation and Prediction, M.I.T., Cambridge, 371
- Meyer-Spasche, R., 1975, Dissertation, Garching/München
- Mitchell, A. und Wait, R., 1976, The finite element method in partial differential equations, J. Wiley, New York
- Mouradian, Z., Martres, M.J. und Soru-Escout, I., 1983, Solar Phys. 87, 309
- Neidig, D.F., Demastus, H.L. und Webory, P.H., 1978, AFGL-TR-78-0194, Environmental Research Papers, Nr. 637
- Parker, E.N., 1979, Cosmical Magnetic Fields, Oxford University Press, England

- Pneuman, G.W., 1981, in E.R. Priest (Ed.), Solar Flare Magneto-
hydrodynamics, Gordon and Breach, London
- Pneuman, G.W., 1983, Solar Phys. 88, 219
- Priest, E.R., 1976, Solar Phys. 47, 41
- Priest, E.R., 1981a, Solar Flare Magnetohydrodynamics, Gordon
and Breach, London
- Priest, E.R., 1981b, in E.R. Priest (Ed.), Solar Flare Magneto-
hydrodynamics, Gordon and Breach, London
- Priest, E.R., 1982, Solar Magnetohydrodynamics, D. Reidel, Dord-
recht/Holland
- Priest, E.R. und Milne, A.M., 1980, Solar Phys. 65, 315
- Rust, D., 1976, Solar Phys. 47, 21
- Sakurai, T., 1979, Publ. Astron. Soc. Japan 31, 209
- Sakurai, T., 1981, Solar Phys. 76, 301
- Schindler, K., 1972, in B.M. McCormac (Ed.), Earth's Magnetosphe-
ric Processes, D. Reidel, Dordrecht/Holland, 200
- Schindler, K., Birn, J. und Janicke, L., 1983, Solar Phys. 87,
103
- Schindler, K. und Birn, J., 1978, Phys. Rep. 47, 109
- Shkarofsky, I.P., Johnston, T.W. und Bachynski, M.P., 1966, The
Particle Kinetics of Plasmas, Addison-Wesley, Reading/Mass.
- Spitzer, L., 1962, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience,
New York
- Stern, D.P., 1970, Amer. J. Phys. 38, 494
- Stern, D.P., 1976, Rev. Geophys. Space Sci. 14, 199
- Sturrock, P.A., 1968, IAU Symp. 35, 471
- Sturrock, P.A., 1980a, in P.A. Sturrock (Ed.), Solar Flares,
Colorado Ass. University Press., Boulder

- Sturrock, P.A., 1980b, Solar Flares, Colorado Ass. University Press,
Boulder
- Sturrock, P.A. und Woodbury, E.T., 1967, Plasma Astrophys., Aca-
demic Press, New York
- Svestka, Z., 1976a, Solar Flares, D. Reidel, Dordrecht/Holland
- Svestka, Z., 1976b, in D.J. Williams (Ed.), Physics of Solar
Planetary Environments, American Geophys. Union, 129
- Svestka, Z., 1981, in E.R. Priest (Ed.), Solar Flare Magneto-
hydrodynamics, Gordon and Breach, London
- Syrovatskii, S.I., 1972, Comments Astrophys. and Space Sci. 4,
65
- Tanaka, K. und Nakagawa, Y., 1973, Solar Phys. 33, 187
- Tandberg-Hanssen, E., 1974, Solar Prominences, D. Reidel, Dord-
recht/Holland
- Thom, R., 1975, Structural Stability and Morphogenesis, Benja-
min, Reading/Massachusetts
- Tsinganos, K.C., 1981, Astrophys. J. 245, 764
- Tsinganos, K.C., 1983, Astrophys. J. 259, 820
- Wilkinson, J.H. und Reinsch, C., 19 , Linear Algebra, Springer,
New York
- Zirin, H. und Tanaka, K., 1973, Solar Phys. 32, 173
- Zwingmann, W., 1980, Diplomarbeit, Bochum

Anhang A: Hinweise zum numerischen Verfahren und Tests

Es wird gezeigt, wie die gekoppelten Gleichungssysteme (3.134) und (3.136) sowie (3.141) und (3.143) gelöst werden, die in ihrer ursprünglichen Form Integrodifferentialgleichungen sind. Beide Gleichungssysteme werden abgekürzt

$$DG \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial G^{(\alpha)}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial G^{(\beta)}}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} R^{(\alpha)} \\ R^{(\beta)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\int (\alpha \dot{\alpha} + \beta \dot{\beta}) dV + \lambda \dot{\lambda} = R^{(\lambda)} \quad (\text{A.2})$$

Die Lösung erhält man durch den im folgenden beschriebenen Algorithmus: Man löse die beiden Gleichungssysteme

$$DG \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G^{(\alpha)}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial G^{(\beta)}}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$DG \begin{pmatrix} f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{(\alpha)} \\ R^{(\beta)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

und erhält λ sowie α und β aus

$$\lambda = \frac{R^{(\lambda)} - \int (\dot{\alpha} f_3 + \dot{\beta} f_4) dV}{\dot{\lambda} - \int (\dot{\alpha} f_1 + \dot{\beta} f_2) dV} \quad (\text{A.5})$$

$$\alpha = f_3 - \lambda f_1, \quad \beta = f_4 - \lambda f_2 \quad (\text{A.6})$$

Das Iterationsverfahren ist damit zurückgeführt auf die Lösung linearer partieller Differentialgleichungssysteme und Ausführung einiger Integrationen. Zur Lösung der Differentialgleichungen wurde wegen der großen Genauigkeit und Flexibilität das Ver-

fahren der finiten Elemente gewählt (z.B. Mitchell und Wait, 1976). Die zu lösenden Gleichungen werden dazu in das äquivalente Variationsprinzip umgeformt und die Funktionen α und β angesetzt als Funktionenreihe

$$\alpha = \sum_i \alpha_i f_i(\underline{r}) \quad , \quad \beta = \sum_i \beta_i f_i(\underline{r}) \quad (\text{A.7})$$

wobei α_i und β_i die Funktionswerte an den Stützstellen $\underline{r}_i$ sind und die $f_i(\underline{r})$ die Interpolationsfunktionen ($F_i(\underline{r}_j) = \delta_{ij}$, entspricht Lagrange-Interpolation). Nach Minimierung bezüglich (α_i) und (β_i) erhält man ein lineares algebraisches Gleichungssystem für den Vektor (α_i, β_i) , das mit Hilfe des Gauß-Verfahrens gelöst wird. Die aus DG gewonnenen algebraischen Matrizen können mit Hilfe des Cholesky-Verfahrens (Wilkinson und Reinsch, 1971) leicht auf Positiv-Definitheit überprüft werden, was als Stabilitätskriterium genutzt wird (Kapitel 3.2, 3.4).

Bei den für diese Arbeit durchgeführten numerischen Rechnungen beschränkten wir uns auf den zweidimensionalen Fall. Zur Unterteilung des Grundgebietes wurden Dreiecke mit quadratischen Interpolationsfunktionen $f_i(x,y)$ als finite Elemente angesetzt (TRIM6-Elemente, Marsal, 1976). Das Verfahren zu Lösung des zweidimensionalen statischen Gleichgewichtsproblems (3.10), (3.11) wurde mit Hilfe zweier analytisch bekannter Lösungen getestet.

1) Kippenhahn-Schlüter-Modell (Kippenhahn und Schlüter, 1958)

Das Kippenhahn-Schlüter-Gleichgewicht wurde schon in Abschnitt 3.2.3 behandelt. Es wurde dort gezeigt, daß das Gleichgewicht bei Randbedingungen mit Teilchenaustausch (3.51) instabil ist.

Dieses Resultat wird numerisch überprüft und die Genauigkeit des numerischen Verfahrens getestet.

Das Potential α wird durch (3.71) gegeben. Aus der Grad-Shafranov-Gleichung (2.24) sieht man, daß dem Gleichgewicht ein konstantes B_z überlagert werden kann, ohne daß sich α ändert. Das Potential $\tilde{\beta}$ gewinnt man aus dem Ansatz (2.17):

$$B_z = (\nabla \alpha \times \nabla \tilde{\beta}) \cdot \underline{e}_z = \alpha_c \left(\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial y} \frac{\tanh(x/L)}{L} - \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial x} \frac{1}{h} \right) = \lambda \frac{\alpha_c}{L} \quad (\text{A.8})$$

Der Ansatz $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(x)$ führt auf

$$\tilde{\beta} = \lambda x \frac{h}{L} \quad (\text{A.9})$$

Der Test wurde im gleichen Grundgebiet wie für die in Abschnitt 4.2 vorgestellten Rechnungen durchgeführt ($-20 \leq x \leq 20 L$, $0 \leq y \leq 30 L$, 13×13 Stützstellen), wobei α (3.71) und $\tilde{\beta}$ (A.9) als Dirichlet-Randbedingungen vorgeschrieben wurde. Für $\lambda = 0,2$ ergab sich eine Abweichung der numerischen Lösung von etwa 1 %.

Der numerische Stabilitätstest ergab Instabilität und bestätigt das analytische Resultat.

2) Low-Gleichgewicht (Low, 1977a)

Low gab Lösungen der Grad-Shafranov-Gleichung (2.24) für $p = 0$ und

$$B_z = \frac{\alpha_c}{L} \sqrt{\lambda} e^{-\alpha/\alpha_c} \quad (\text{A.10})$$

an, die dargestellt werden durch

$$\alpha = \alpha_c \ln \left(\frac{x^2 + y^2 - 2 h y + L^2}{L^2} \right) \quad (\text{A.11})$$

mit

$$h_v = \pm L \sqrt{1 - \lambda/4} \quad (\text{A.12})$$

Daraus folgt

$$B_z = \frac{\alpha_c L \sqrt{\lambda}}{x^2 + (\gamma - h_v)^2 + L^2 - h_v^2} \quad (\text{A.13})$$

Man erhält, wie man durch Einsetzen verifizieren kann, mit der Darstellung der B_z -Komponente (2.17) aus (A.11) und (A.13)

$$\tilde{\beta} = \frac{L}{2} \sqrt{\lambda} \arctan \frac{x}{\gamma - h_v} \quad (\text{A.14})$$

Bei der Durchführung des Tests beschränkten wir uns auf negatives h_v , da für positives h_v (A.14) nicht stetig ist. Der numerische Test wurde, wie beim Kippenhahn-Schlüter-Modell beschrieben, mit (A.11) und (A.14) als Randbedingung durchgeführt. Für $\lambda = 1$ ergab sich eine Abweichung von etwa 2 % für α und β . Es wurde außerdem zweidimensionale Stabilität gefunden, was mit dem Ergebnis von Low (1977 b) übereinstimmt.

Lebenslauf

Geboren: 26. 8. 1955 in Oberhausen/Rheinland

Eltern: Wilhelm Ludwig Zwingmann, Kaufm.
Angestellter
Rosmarie Ursula Zwingmann, geb. Köhler

Schulbesuch: Hegelschule, Oberhausen
1962 - 1965
Freiherr-vom-Stein-Gymnasium, Oberhausen
1965 - 1973

Studium der Physik: Ruhr-Universität Bochum
WS 1973 - SS 1980

Diplom-Vorprüfung: 7. 10. 1975

Diplom-Hauptprüfung: 14. 8. 1980

Thema der Diplomarbeit: "Zweidimensionale Gleichgewichtszustände des Schweifs der Magnetosphäre"

wissenschaftlicher Mitarbeiter: Ruhr-Universität Bochum
seit 1. 9. 1980

